Table des matières

Un enseignant en mathématiques veut apprendre à une élève (blonde !) à calculer des limites. Après quelques explications sommaires, il donne en exemple cette limite :

$$\lim_{x\to 8^+} \frac{1}{x-8} = +\infty.$$

La blonde lui assure alors qu'elle a compris, mais pour en avoir la certitude, le professeur lui demande de calculer une autre limite du même acabit. Voici le résultat qu'elle propose :

$$\lim_{x\to 5^+} \frac{1}{x-5} = +\rotatebox{90}{5}.$$

Introduction

Ah !! Les fonctions ! Je suis certain que cela vous manquait.
Depuis la classe de troisième, on manipule cet objet mathématique. Et c'est normal, puisque les fonctions sont extrêmement importantes, que ce soit pour la physique, la biologie, ou pour le métier d'ingénieur. Vous croyiez avoir tout vu à ce sujet ?! Détrompez-vous, les fonctions vous réservent bien des surprises. Mais n'ayez pas peur ! Avec de l'audace, saupoudrée de courage et de pugnacité, vous arriverez à dompter ce concept.

On commence donc ce cours de terminale S par des rappels de Première, afin de vous échauffer et de vous éviter un claquage cérébral avant de débuter la compétition. Je n'annoncerai pas les nouveautés dans ce chapitre, à vous de les trouver ! A vos stylos, et bonne lecture !

1 Domaine de définition

Avant toute étude d'une fonction f, il faut **toujours** définir son *domaine de définition.*

Définition : Le *domaine de définition* d'une fonction est l'ensemble des réels pour lesquels on peut déterminer l'image par cette fonction.

Remarque : Evidemment, on ne peut pas étudier une fonction là où elle n'existe pas (vous pourriez, vous, étudier la physiologie des Martiens ?). C'est la raison pour laquelle il est primordial de ne pas sauter cette étape !

exemples :

1. *Pour les fonctions affines, dont l'expression est de la forme $f(x) = ax + b$, où a et b sont des réels, le domaine de définition est $\mathbb{R}$.*
2. *La fonction carrée est plus restrictive. En effet, depuis la maternelle, vous savez qu'on ne peut calculer la racine carrée d'un nombre négatif (en tout cas, pas encore...).*
   Le domaine de définition de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est donc $[0; +\infty[$.
3. *Les fractions rationnelles sont aussi assez contraignantes. J'oubliais ! Pour ceux qui ne le sauraient pas, une fraction rationnelle est une fraction dont le numérateur et le dénominateur sont des polynômes, c'est-à-dire qu'elle s'écrit sous la forme $x \mapsto f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, avec P et Q des polynômes.*
   Toujours depuis la maternelle, vous savez qu'on ne peut diviser par zéro. Par conséquent, si pour une valeur x_0 le dénominateur Q s'annule, on ne peut pas calculer l'image de x_0 par f.
   Donc le domaine de définition de f exclut x_0.
4. *On peut aussi combiner les plaisirs ! Pour la fonction $x \mapsto f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$, on exclut les nombres inférieurs à 1 (à cause de la racine), et on exclut la valeur 1 (à cause du dénominateur).*
   Donc le domaine de définition de f est $]1; +\infty[$.

Méthode : De manière générale, lorsque vous étudiez le domaine de définition d'une fonction, vous partez de $\mathbb{R}$ et vous enlevez toutes les valeurs interdites : les nombres négatifs sous une racine carrée, les racines du dénominateur pour une fraction rationnelle etc.

2 Limites d'une fonction

Comme vous le savez, les mathématiciens sont très fainéants. Alors pour ne pas le répéter à chaque fois, dans toute la suite du cours, on notera f une fonction, dont le domaine de définition est noté $\mathcal{D}$ et dont la courbe représentative dans un repère $(O; \vec{i}\,; \vec{j}\,)$ est notée $\mathcal{C}$.

2.1 Définitions et unicité

Avant d'attaquer le vif du sujet et de donner la définition rigoureuse de la limite d'une fonction, je vais en donner une notion intuitive. La limite d'une fonction f lorsque x tend vers $+\infty$ est le comportement de cette fonction lorsque x est très grand, par exemple lorsque x vaut 1 milliard.

exemple : Pour la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x}$, *on a* $f(1000000000) = 0,000000001$, *c'est-à-dire* $f(1000000000) \cong 0$. *On a alors que la limite de* $f(x)$ *quand* x *tend vers* $+\infty$ *vaut* 0.

Il arrive malheureusement de tomber dans la vie sur des fonctions avec valeurs interdites. On aimerait néanmoins comprendre le comportement de cette fonction au voisinage de cette valeur interdite, c'est-à-dire pour des valeurs de x proches de cette dernière.

exemple : Reprenons le cas de la fonction inverse : $f : x \mapsto \frac{1}{x}$. *Naturellement,* 0 *est une valeur interdite. Mais comment se comporte cette fonction inverse au voisinage de* 0 *? On a* $f(0,000000001) = 1000000000$, *c'est-à-dire* $f(0,000000001)$ *est très grand. On peut ainsi dire que la limite de la fonction inverse, lorsque* x *tend vers* 0, *est* $+\infty$.

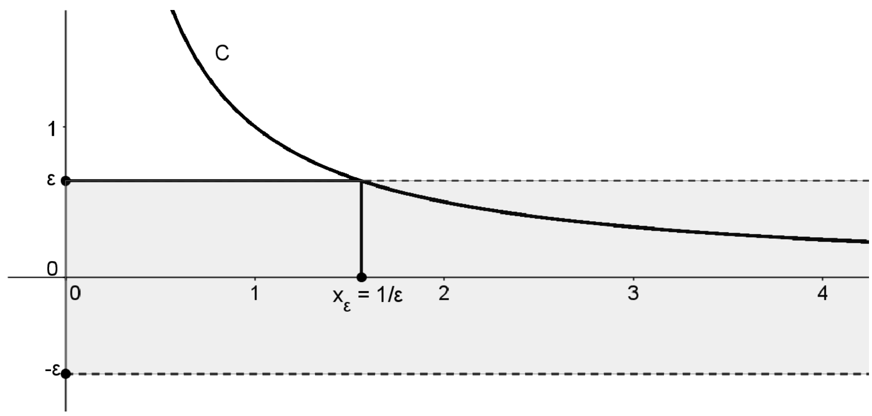
C'est simple non ? Ne vous réjouissez pas trop vite ! ! La définition est assez indigeste au premier abord, voire nauséeuse... Si elle vous semble trop difficile à comprendre, ne passez pas deux jours dessus !

Définition : (*Limite en* $+\infty$)

– On dit que $f(x)$ tend vers un réel L quand x tend vers $+\infty$, noté $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L$, si tout intervalle ouvert centré en L contient $f(x)$ pour x assez grand.

$$\boxed{(\lim_{x\to+\infty} f(x) = L) \Longleftrightarrow (\forall\varepsilon > 0, \exists x_\varepsilon \in \mathcal{D} \text{ tel que } \forall x > x_\varepsilon,\ f(x) \in]L-\varepsilon; L+\varepsilon[).}$$

exemple : Soit $f : x \mapsto \frac{1}{x}$. *Son domaine de définition est* $\mathbb{R}^*$. *Montrons que* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
Soit $\varepsilon > 0$. *On pose* $x_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon}$. *On a :* $x > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow 0 < \frac{1}{x} < \varepsilon \Rightarrow f(x) \in]0; \varepsilon[$.
Par conséquent, $f(x) \in]-\varepsilon; \varepsilon[$.
Donc avec $L = 0$, *on a que* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

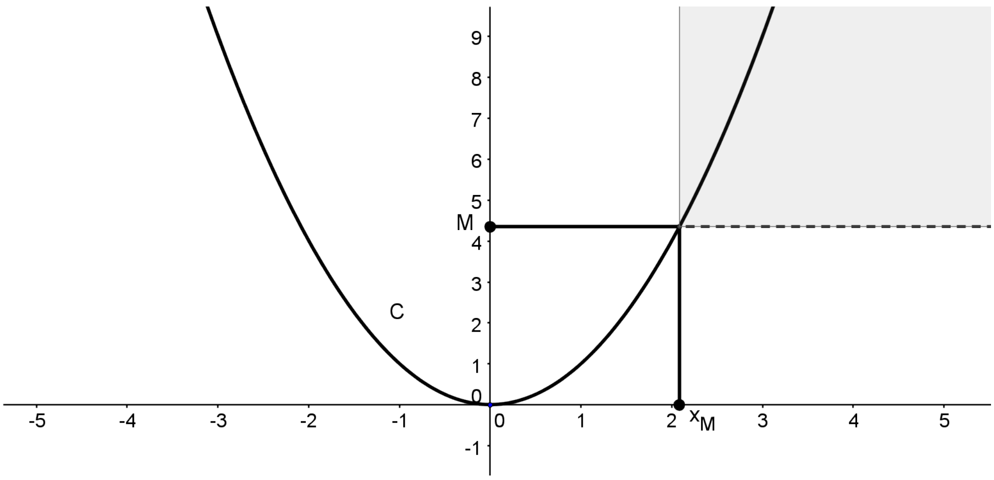


Fonction inverse.

– On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$, noté $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$,
si tout intervalle de la forme $]M;+\infty[$, avec $M \in \mathbb{R}$, contient $f(x)$ pour x assez grand.

$$\boxed{(\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty) \iff (\forall M > 0, \exists x_M \in \mathcal{D} \text{ tel que } \forall x > x_M,\ f(x) > M).}$$

exemple : Soit $f : x \mapsto x^2$. *Son domaine de définition est* $\mathbb{R}$. *Montrons que* $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
Soit $M \in \mathbb{R}$.
☐ *Si* $M < 0$, *alors* $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0 > M$, *c'est-à-dire* $f(x) \in]M;+\infty[$.
☐ *Soit* $M \geq 0$. *On pose* $x_M = \sqrt{M}$. *On a :* $\quad \forall x > \sqrt{M} \geq 0, x^2 > M$,
donc $f(x) \in]M;+\infty[$. *Par conséquent,* $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.



Fonction carrée.

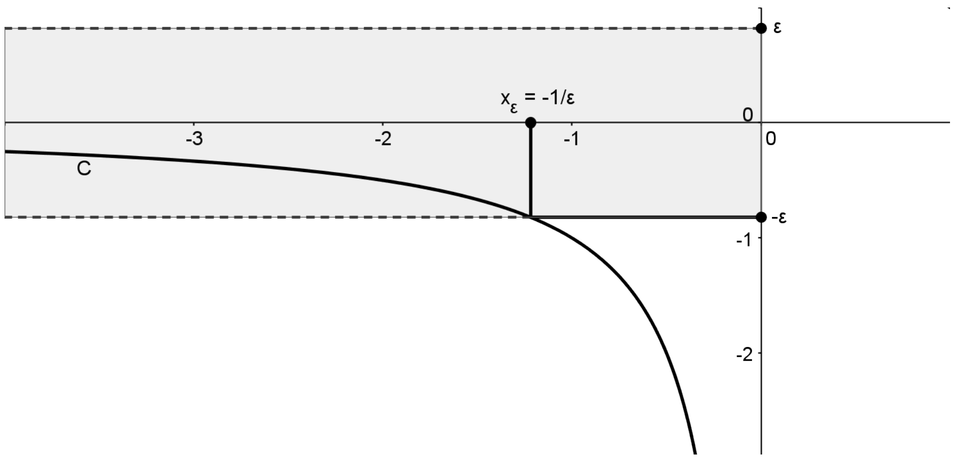
Remarque : On a une définition très similaire pour $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$. Je vous laisse la trouver !

Définition : *(Limite en $-\infty$)*

- On dit que $f(x)$ tend vers un réel L quand x tend vers $-\infty$, noté $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = L$, si tout intervalle ouvert centré en L contient $f(x)$ pour x assez petit.

$$\boxed{(\lim_{x\to-\infty} f(x) = L) \Longleftrightarrow (\forall\varepsilon > 0, \exists x_\varepsilon \in \mathcal{D} \text{ tel que } \forall x < x_\varepsilon,\ f(x) \in]L-\varepsilon; L+\varepsilon[).}$$

exemple : Soit $f : x \mapsto \frac{1}{x}$. Son domaine de définition est $\mathbb{R}^*$. Montrons que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$.
Soit $\varepsilon > 0$. On pose $x_\varepsilon = \frac{-1}{\varepsilon}$. On a : $\quad x < \frac{-1}{\varepsilon} \Rightarrow -\varepsilon < \frac{1}{x} < 0 \Rightarrow f(x) \in]-\varepsilon; 0[$.
Par conséquent, $f(x) \in]-\varepsilon; \varepsilon[$.
Donc avec $L = 0$, on a que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

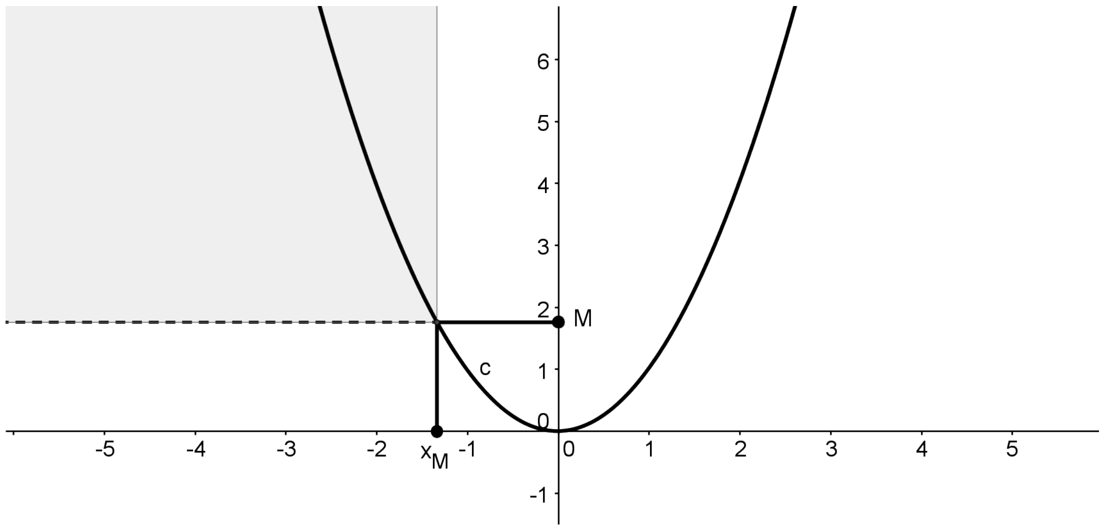


Fonction inverse.

– On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $-\infty$, noté $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$, si tout intervalle de la forme $]M; +\infty[$, avec $M \in \mathbb{R}$, contient $f(x)$ pour x assez petit.

$$\boxed{(\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty) \iff (\forall M > 0, \exists x_M \in \mathcal{D} \text{ tel que } \forall x < x_M,\ f(x) > M).}$$

exemple : Soit $f : x \mapsto x^2$ *Son domaine de définition est* $\mathbb{R}$. *Montrons que* $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.
Soit $M \in \mathbb{R}$.
☐ *Si* $M < 0$, *alors* $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0 > M$, *c'est-à-dire* $f(x) \in]M; +\infty[$.
☐ *Soit* $M \geq 0$. *On pose* $x_M = -\sqrt{M}$. *On a :* $\forall x < -\sqrt{M} \leq 0, x^2 > M$,
donc $f(x) \in]M; +\infty[$. *Ainsi,* $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.



Fonction carrée.

Remarque : On a une définition très similaire pour $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

Proposition 1 : Soit f une fonction définie sur $\mathcal{D}$.
Si f admet une limite l en $+\infty$, alors cette limite est unique.

Démonstration : Nous allons démontrer cette proposition par l'*absurde*. C'est une technique de démonstration à retenir, car elle peut vous sortir de pas mal de problèmes, sans forcer !
La philosophie de ce type de démonstration est la suivante : on va supposer qu'une assertion est vraie, ce qui va nous amener sur une contradiction (par exemple $1 = 2$). On en déduire que l'assertion supposée est fausse !
On veut ici démontrer que si f admet une limite l en $+\infty$, alors l est unique. Supposons donc que f admet deux limites différentes en $+\infty$: l et l'. Supposons, sans perte de généralités, que $l' > l$, et notons $\mu = l' - l > 0$. (Si $l' < l$, le raisonnement qui suit est similaire !)
On a :

- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$, donc $\exists M_1 \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x > M_1, f(x) \in]l - \frac{\mu}{2}; l + \frac{\mu}{2}[$.
  (On reprend la définition de la limite en $+\infty$ avec $\varepsilon = \frac{\mu}{2}$)
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l'$, donc $\exists M_2 \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x > M_2, f(x) \in]l' - \frac{\mu}{2}; l' + \frac{\mu}{2}[$.
  (On reprend la définition de la limite en $+\infty$ avec $\varepsilon = \frac{\mu}{2}$)

Ainsi, $\forall x > max(M_1; M_2)$, on a :

$$l' - \frac{\mu}{2} < f(x) < l + \frac{\mu}{2}.$$

Or, $l' = l + \mu$, donc $\forall x > max(M_1; M_2)$, on a :

$$l + \mu - \frac{\mu}{2} < f(x) < l + \frac{\mu}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad l + \frac{\mu}{2} < f(x) < l + \frac{\mu}{2}.$$

Ceci est impossible. Ainsi, en supposant que $l \neq l'$, on tombe sur une contradiction. Donc, $l = l'$.

$\square$

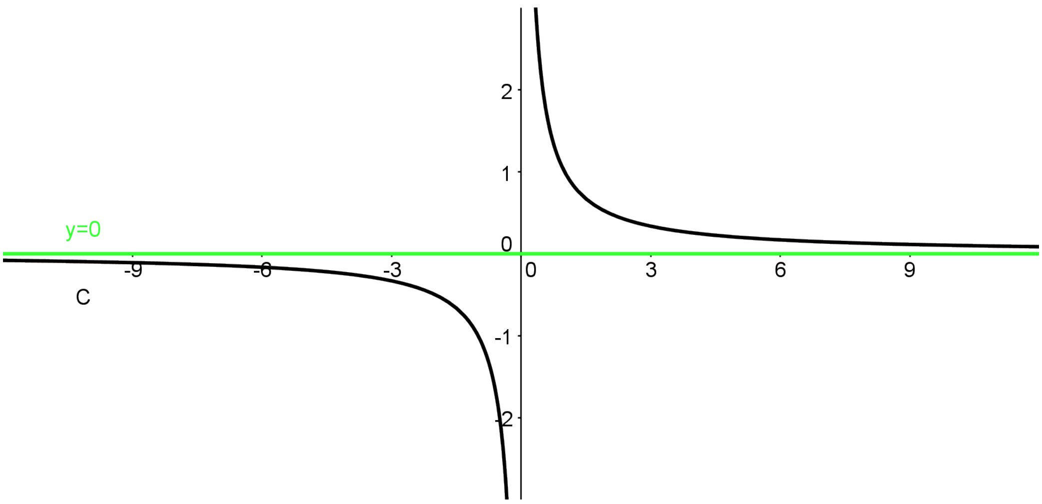
2.2 Asymptotes

Alors, le repas que je vous ai concocté vous a-t-il plu ? Il est vrai que le menu "Limites" n'est pas le meilleur de notre cher restaurant "Les mathématiques en terminale S", mais il est indispensable de le goûter au moins une fois dans sa vie. Comme a dit Thierry Rolland au soir du dimanche 12 juillet 1998, au coup de sifflet final du match contre le Brésil, proclamant le premier titre de Champion du Monde de football à la France : "Une fois qu'on a vu ça, on peut mourir tranquille !"
J'en vois déjà qui se disent "Mais il est trop bizarre ce mec. Je savais que faire des maths toute la journée pouvait rendre fou, mais pas à ce point là !". Et j'imagine aussi que certains d'entre vous se demandent "mais à quoi elles servent ces foutues limites ? !" (et encore, je suis poli !). On se détend les enfants ! Afin de répondre à cette question importante mais dont la réponse ne changera pas la face du monde, j'ai donc décidé, en guise de digestion, de vous expliquer en quoi consiste l'utilité des limites, avant de vous donner les propriétés sur les limites, qu'il faudra absolument comprendre et retenir.
C'est très simple ! Savoir comment se comporte une fonction, par exemple en $+\infty$, est très pratique si on veut tracer la courbe de la fonction en question. L'étude des limites peut permettre d'approximer une fonction par d'autres, la plupart du temps par des fonctions affines, très simples à étudier et dont la représentation graphique est très facile à réaliser (ce sont des droites !). Ces droites qui approximent la courbe de la fonction étudiée sont appelées des **asymptotes**. Les trois principales asymptotes sont les asymptotes **horizontales**, **obliques** et **verticales**.

2.2.1 Asymptote horizontale

Définition : Lorsque $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$ (respectivement $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$) , où L est un réel quelconque, on dit que $\mathcal{C}$ admet une *asymptote horizontale* au voisinage de $+\infty$ (respectivement $-\infty$), d'équation $y = L$. Cette droite est une approximation de la courbe.

exemple : La fonction inverse admet pour asymptote horizontale la droite d'équation $y = 0$, en $+\infty$ et en $-\infty$.



La droite d'équation $y = 0$ asymptote horizontale de la fonction inverse.

2.2.2 Asymptote oblique

<u>Définition</u> : On dit que la droite d'équation $y = ax+b$, où a et b sont des réels quelconques, est *asymptote oblique* à $\mathcal{C}$, au voisinage de $+\infty$ (respectivement $-\infty$), lorsque $\lim_{x \to +\infty} f(x) - (ax+b) = 0$ (respectivement $\lim_{x \to -\infty} f(x) - (ax+b) = 0$).

<u>Méthode</u> : Je vous rassure, on ne va pas essayer toutes les fonctions affines (bien qu'on ne pourrait pas !) pour trouver celle qui sera asymptote à notre fonction. Une manière de procéder est la suivante : Vous écrivez l'expression de votre fonction f sous la forme suivante :

$$f(x) = ax + b + reste, \forall x \in \mathcal{D}, \text{ où } a \text{ et } b \text{ sont des réels, à trouver.}$$

En fait, il faut faire apparaître la partie affine de votre fonction f. Soit cette partie affine est assez évidente à trouver, ce qui est la cas pour certaines fractions rationnelles, pour lesquelles on peut découper la fraction en plusieurs (cf exemple ci-dessous) ; soit c'est plus délicat. Dans ce dernier cas, l'énoncé de l'exercice vous guidera (vous en avez un parfait exemple dans le **Paragraphe 7, Question 7**).
Le reste, quant à lui, a une mission à réaliser : il doit tendre vers 0 lorsque x tend vers $-\infty$ ou $+\infty$. Ainsi :

$$\forall x \in \mathcal{D}, f(x) - (ax+b) = reste\,;$$

et

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - (ax+b) = \lim_{x \to +\infty} reste = 0.$$

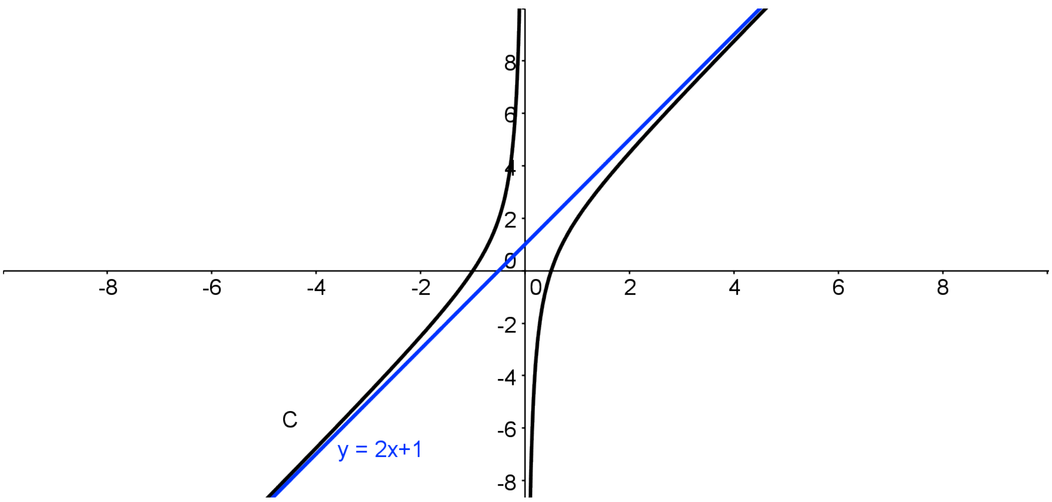
exemple : Soit $f : x \mapsto \frac{2x^2+x-1}{x}$ définie sur $\mathcal{D} = \mathbb{R}^*$ (Je n'ai pas oublié le domaine de définition !!).
$\mathcal{C}$ admet-elle une asymptote oblique au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$?
On a, en séparant en plusieurs fractions :

$$\forall x \in \mathcal{D}, f(x) = \tfrac{2x^2+x-1}{x} = \tfrac{2x^2}{x} + \tfrac{x}{x} + \tfrac{-1}{x} = 2x + 1 + \tfrac{-1}{x}.$$

Ainsi,

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - (2x+1) = \lim_{x \to +\infty} \tfrac{-1}{x} = 0.$$

Donc la droite d'équation $y = 2x+1$ est asymptote oblique à $\mathcal{C}$ au voisinage de $+\infty$.
Par la même démarche, on montre que cette droite est aussi asymptote oblique à $\mathcal{C}$ au voisinage de $-\infty$.



La droite d'équation $y = 2x + 1$ asymptote oblique de la fonction $x \mapsto \frac{2x^2+x-1}{x}$.

2.2.3 Asymptote verticale

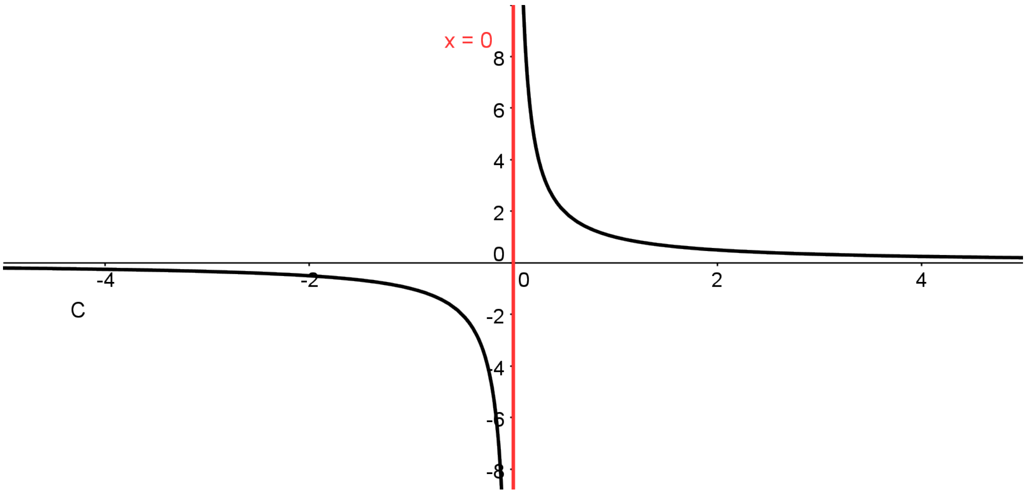
Définition : Lorsque $f(x)$ tend vers $+\infty$ (respectivement $-\infty$) lorsque x tend vers a, noté $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ (respectivement $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$), on dit que la droite d'équation $x = a$ est *asymptote verticale* à $\mathcal{C}$.

Remarque : Lorsqu'on étudie la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers a, il est parfois nécessaire de regarder le cas où x tend vers a, mais $x < a$ (noté $\lim_{x \to a^-} f(x)$), et le cas où x tend vers a, mais $x > a$ (noté $\lim_{x \to a^+} f(x)$).

exemple : Soit f la fonction inverse. On a :

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty.$$

Donc la droite d'équation $x = 0$ est asymptote verticale à $\mathcal{C}$.



La droite d'équation $x = 0$ asymptote verticale de la fonction inverse.

2.2.4 Propriétés et remarques

Si, au voisinage de $+\infty$, $-\infty$ ou a, $\mathcal{C}$ admet une asymptote, alors elle est unique.

Remarque : Souvent, si une droite est asymptote à $\mathcal{C}$ au voisinage de $+\infty$, elle l'est aussi au voisinage de $-\infty$. **Mais ATTENTION, ce N'est PAS un fait général!!!**.

exemple : Soit $f : x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{x} \text{ si } x < 0 \\ x \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$. *On a* $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.
Au voisinage de $-\infty$*, la droite d'équation* $y = 0$ *est asymptote horizontale à* $\mathcal{C}$*, alors qu'elle ne l'est pas au voisinage de* $+\infty$*! En effet, la droite d'équation* $y = x$ *est asymptote oblique à* $\mathcal{C}$ *au voisinage de* $+\infty$ *(évident!), et par la 2.2.4* ***Proposition 2****, elle est unique.*

Proposition 2 :

1. Si $\mathcal{C}$ admet une asymptote oblique d'équation $y = ax + b$ au voisinage de $+\infty$, alors :
$$a > 0 \Longrightarrow \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \qquad ; \qquad a < 0 \Longrightarrow \lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty.$$
2. Si $\mathcal{C}$ admet une asymptote oblique d'équation $y = ax + b$ au voisinage de $-\infty$, alors :
$$a > 0 \Longrightarrow \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \qquad ; \qquad a < 0 \Longrightarrow \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty.$$

ATTENTION! La réciproque n'est pas vraie!
Si $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, on n'a pas nécessairement que $\mathcal{C}$ admet une asymptote oblique au voisinage de $+\infty$.

exemple : Soit $f : x \mapsto x^2$. *On a bien* $\lim_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$, *mais* $\mathcal{C}$ *n'admet pas d'asymptote oblique au voisinage de* $+\infty$.

2.3 Propriétés et opérations sur les limites

Je ne sais pas vous, mais pour ma part, quand je vais au restaurant, c'est le dessert qui fait le plus frémir mes papilles gustatives ! Ce sera aussi le cas ici avec cette partie "Propriétés et opérations sur les limites", véritable mousse au chocolat de ce menu "Limites". N'oubliez pas de mettre votre serviette autour du cou. Bonne fin d'appétit !

Il semble évident de débuter cette section en énonçant les propriétés sur la limite de la somme de deux fonctions, la somme étant la première opération qu'on apprend dans le ventre de sa mère. En effet, le bébé compte le nombre de jours qu'il passe dans cet endroit chaud et humide avant de sortir. Pourquoi croyez-vous qu'on naisse tous environ après 9 mois passés là-dedans ? ! Le cas des prématurés s'explique ainsi : ils ne savent tout simplement pas compter, et pensent que $1 + 1 = 3$!

Soient f et g deux fonctions (pour simplifier, elles ont le même domaine de définition $\mathcal{D}$).

2.3.1 Somme

Il est naturel de penser que la limite de la somme est égale à la somme des limites.
En termes mathématiques, on a, par exemple :

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)+g(x)) = \lim_{x\to+\infty} f(x) + \lim_{x\to+\infty} g(x).$$

La vie serait trop ennuyeuse si tout était si simple ! Il y a donc des cas où cette règle ne s'applique pas : on les appelles les *formes indéterminées* (que l'on notera dorénavant FI).

Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$, que vaut $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)+g(x))$?
On obtient "$\infty - \infty$" (ATTENTION, on ne l'écrit jamais !) qui est une FI.

Proposition 3 : Sauf pour la FI "$\infty - \infty$", la limite de la somme est égale à la somme des limites.
Par exemple :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}(f(x)+g(x)) = \lim_{x\to+\infty} f(x) + \lim_{x\to+\infty} g(x).}$$

exemple : Soit $f : x \mapsto x^2$ et $g : x \mapsto 2x$, définies sur $\mathbb{R}$.
On a clairement que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty = \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$. Ainsi, $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)+g(x)) = +\infty$! !

Pour le cas $+\infty - \infty$, qui remporte le combat entre $+\infty$ et $-\infty$? Il faut étudier au cas par cas.
Mais pas de panique ! Vous croyez qu'on vous envoie au combat sans aucune arme ? C'est bien mal nous connaître ! Vous avez en poche un théorème, que j'énoncerai dans la partie qui suit, car sa démonstration nécessite une proposition concernant la limite du produit de deux fonctions.

Théorème 1 : La limite en $+\infty$ (respectivement $-\infty$) d'un polynôme non nul est égale à la limite en $+\infty$ (respectivement $-\infty$) de son monôme de plus haut degré.

Démonstration : Soit P un polynôme de degré n, c'est-à-dire que P s'écrit sous la forme $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, où $a_i \in \mathbb{R}$, pour tout i entier entre 0 et n, et $a_n \neq 0$. Montrons alors que $\lim\limits_{x\to+\infty} P(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} a_n x^n$ (le cas en $-\infty$ se traite exactement de la même manière !).
Soit $x \in \mathbb{R}^*$ (le cas $x = 0$ n'est pas intéressant, car on s'intéresse à la limite quand x tend vers $+\infty$!!).
On a alors, en factorisant par $a_n x^n$:

$$P(x) = a_n x^n \times (1 + \tfrac{a_{n-1}x^{n-1}}{a_n x^n} + \tfrac{a_{n-2}x^{n-2}}{a_n x^n} + ... + \tfrac{a_1 x}{a_n x^n} + \tfrac{a_0}{a_n x^n}).$$

En simplifiant :

$$P(x) = a_n x^n \times (1 + \tfrac{a_{n-1}}{a_n x} + \tfrac{a_{n-2}}{a_n x^2} + ... + \tfrac{a_1}{a_n x^{n-1}} + \tfrac{a_0}{a_n x^n}) \qquad (1).$$

Regardons la limite lorsque x tend vers $+\infty$ du polynôme entre parenthèses. On a clairement que, pour tout i entier entre 0 et $n-1$, $n-i$ est un entier compris entre 1 et n et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^{n-i}} = 0$.
Par conséquent, en multipliant par $\frac{a_i}{a_n}$, on a :

$$\lim_{x\to+\infty} \tfrac{a_i}{a_n x^{n-i}} = 0, \text{ pour tout } i \text{ entier compris entre 0 et } n-1.$$

Par suite :

$$\lim_{x\to+\infty} (1 + \tfrac{a_{n-1}}{a_n x} + \tfrac{a_{n-2}}{a_n x^2} + ... + \tfrac{a_1}{a_n x^{n-1}} + \tfrac{a_0}{a_n x^n}) = 1 \qquad (2).$$

Par conséquent, avec (1) et (2), et en supposant que la limite d'un produit est le produit des limites (que l'on verra dans la partie suivante), on a :

$$\lim_{x\to+\infty} P(x) = \lim_{x\to+\infty} a_n x^n \times \lim_{x\to+\infty} (1 + \tfrac{a_{n-1}x^{n-1}}{a_n x^n} + \tfrac{a_{n-2}x^{n-2}}{a_n x^n} + ... + \tfrac{a_1 x}{a_n x^n} + \tfrac{a_0}{a_n x^n}) = \lim_{x\to+\infty} a_n x^n.$$

□

exemple : On aimerait déterminer la limite en $+\infty$ de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$x \mapsto -4x^6 + 18x^5 + 3x^3 + 7x + 1.$$

*On tombe sur une FI : "$-\infty + \infty + \infty + \infty$". On serait tenté de dire que comme il y a plus de $+\infty$, c'est lui qui remporte la mise ! Et bien non, car le **Théorème 1** nous donne :*

$$\lim_{x\to+\infty} -4x^6 + 18x^5 + 3x^3 + 7x + 1 = \lim_{x\to+\infty} -4x^6 = -\infty.$$

Remarque : On le répète si besoin était :
il faut **PENSER** que $\lim\limits_{x\to+\infty} -4x^6 = (-4) \times (+\infty)$, mais on **NE L'ECRIT JAMAIS !**

2.3.2 Produit et Quotient

Tout comme pour la somme, il est naturel de penser que la limite du produit est égale au produit des limites :

$$\lim_{x\to a}(f(x)\times g(x))=\lim_{x\to a}f(x)\times\lim_{x\to a}g(x),\text{ où } a \text{ est réel, } a=-\infty \text{ ou } a=+\infty\,;$$

et que la limite du quotient est le quotient des limites :

$$\lim_{x\to a}(\tfrac{f(x)}{g(x)})=\frac{\lim_{x\to a}f(x)}{\lim_{x\to a}g(x)},\text{ où } a \text{ est réel, } a=-\infty \text{ ou } a=+\infty.$$

La limite d'un produit ou d'un quotient est naturelle, tout comme pour la somme. Mais vous vous en doutez, là aussi on peut tomber sur des FI. Il y a la FI "$\frac{0}{0}$", "$\frac{\infty}{\infty}$" et "$0\times\infty$". Pour combattre ce fléau qui tend à se répandre dans le monde, un remède bien efficace réside dans le théorème suivant.

Théorème 2 : La limite en $+\infty$ (respectivement $-\infty$) d'une fraction rationnelle non nulle est égale à la limite en $+\infty$ (respectivement $-\infty$) du quotient des monômes de plus haut degré.

Démonstration : Notons f une fraction rationnelle, sous la forme $x\mapsto f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$, définie sur $\mathcal{D}$, avec P et Q deux polynômes.
La démonstration de ce théorème est du même style que celle du **Théorème 1**, c'est-à-dire qu'on factorise P et Q par leurs monômes de plus hauts degrés.
Posons, pour tout $x\in\mathcal{D}$, $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0$, où $a_i\in\mathbb{R}$, pour tout i entier entre 0 et n, et $a_n\neq 0$.
Posons, pour tout $x\in\mathcal{D}$, $Q(x)=b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+...+b_1x+b_0$, où $b_i\in\mathbb{R}$, pour tout i entier entre 0 et m, et $b_m\neq 0$.
On a alors :

$$\text{Pour tout } x\in\mathcal{D},\ f(x)=\frac{a_nx^n\times(1+\frac{a_{n-1}x^{n-1}}{a_nx^n}+\frac{a_{n-2}x^{n-2}}{a_nx^n}+...+\frac{a_1x}{a_nx^n}+\frac{a_0}{a_nx^n})}{b_mx^m\times(1+\frac{b_{m-1}x^{m-1}}{b_mx^m}+\frac{b_{m-2}x^{m-2}}{b_mx^m}+...+\frac{b_1x}{b_mx^m}+\frac{b_0}{b_mx^m})}.$$

Je ne refais donc pas les calculs (trop la flemme!), mais on a :

$$\lim_{x\to+\infty}(1+\frac{a_{n-1}x^{n-1}}{a_nx^n}+\frac{a_{n-2}x^{n-2}}{a_nx^n}+...+\frac{a_1x}{a_nx^n}+\frac{a_0}{a_nx^n})=1 \text{ et } \lim_{x\to+\infty}(1+\frac{b_{m-1}x^{m-1}}{b_mx^m}+\frac{b_{m-2}x^{m-2}}{b_mx^m}+...+\frac{b_1x}{b_mx^m}+\frac{b_0}{b_mx^m})=1.$$

D'où :

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{a_nx^n}{b_mx^m}.$$

$\square$

Remarque : On n'a plus qu'à simplifier les puissances de x entre elles, et l'indétermination est levée, comme nous allons le voir dans l'exemple qui suit.

exemple : On aimerait déterminer la limite en $-\infty$ de la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{12\}$ par :

$$x \mapsto \frac{2x^3-5x+4}{x-12}.$$

*Par le **Théorème 1**, on obtient que :*

$$\lim_{x\to-\infty} 2x^3 - 5x + 4 = \lim_{x\to-\infty} 2x^3 = -\infty\,;$$

et comme

$$\lim_{x\to-\infty} x - 12 = -\infty,$$

*on obtient la FI "$\frac{-\infty}{-\infty}$". Pour lever cette indétermination, on utilise alors le **Théorème 2**, qui nous donne :*

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^3-5x+4}{x-12} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x^3}{x} = \lim_{x\to-\infty} 2x^2 = +\infty.$$

Remarque : Pour bien vous convaincre qu'il n'y a pas de règle générale pour les FI, prenons l'exemple de la FI "$\frac{+\infty}{+\infty}$" au voisinage de $+\infty$. Le but est de trouver deux cas de cette FI, dont le premier nous donnera finalement comme limite $+\infty$, et le deuxième 0 :

Prenons pour premier cas : $\frac{x^2}{x}$; et pour deuxième cas : $\frac{x}{x^2}$. On a :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x\to+\infty} x = +\infty\,;$$

et

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Faites donc attention à vous, et gardez bien ces deux théorèmes dans votre poche !

Voici pour finir les 4 FI à reconnaître absolument :

$\infty - \infty$	$0 \times \infty$	$\frac{0}{0}$	$\frac{\infty}{\infty}$

2.3.3 Composée de limites

Alors là, je sens que je vais devoir faire le point sur la composée de deux fonctions, véritable bête noire pour certains élèves de Première ! Fermez les portes, volets et fenêtres, l'heure est grave.
Asseyez-vous confortablement et respirez profondément. C'est parti !

Définition : Soient $I \subseteq \mathbb{R}, J \subseteq \mathbb{R}, K \subseteq \mathbb{R}$ et $L \subseteq \mathbb{R}$, tels que $L \subseteq I$.
Soit $f : I \longrightarrow J$ et $g : K \longrightarrow L$ deux fonctions.
On définit la *fonction composée* $f \circ g$ par :

$$f \circ g : \begin{array}{ccl} K & \longrightarrow & J \\ x & \longmapsto & f \circ g(x) = f(g(x)) \end{array}$$

Remarques :

1. Pour la composée $f \circ g$, on applique d'abord la fonction g, puis la fonction f.
2. On peut voir la composée comme un relais en athlétisme. C'est g qui part la première avec le témoin. Elle part donc de K et arrive en L. Afin de pouvoir passer le témoin à f, il est **nécessaire** que g arrive à un endroit d'où f peut partir. C'est la raison pour laquelle dans la définition on a $L \subseteq I$. Une fois g arrivée en I, f prend le relais et arrive en J.
3. Attention, en général, $f \circ g \neq g \circ f$.
   exemple : Soit $f : x \mapsto 2x + 1$ et $g : x \mapsto x^2 + 3x - 4$ définies sur $\mathbb{R}$. On a :
   $$\forall x \in \mathbb{R}, f \circ g(x) = f(g(x)) = f(x^2 + 3x - 4) = 2(x^2 + 3x - 4) + 1 = 2x^2 + 6x - 7.$$
   et
   $$\forall x \in \mathbb{R}, g \circ f(x) = g(f(x)) = g(2x + 1) = (2x + 1)^2 + 3(2x + 1) - 4 = 4x^2 + 10x;$$

Théorème 3 : Soient a, L et L' des réels, ou alors égaux à $-\infty$ ou à $+\infty$. On a :

$$\boxed{\lim_{x \to a} g(x) = L \text{ et } \lim_{y \to L} f(y) = L' \Longrightarrow \lim_{x \to a} f \circ g(x) = L'.}$$

exemple : Considérons les deux fonctions f et g définies à la remarque précédente.
On a :

$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = \lim_{x \to -\infty} x^2 + 3x - 4 = \lim_{x \to -\infty} x^2 = +\infty\,;$$

et

$$\lim_{y \to +\infty} f(y) = \lim_{y \to +\infty} 2y + 1 = +\infty\,;$$

*Ainsi, par le **Théorème 3**, on a $\lim\limits_{x \to -\infty} f \circ g(x) = +\infty$.*

2.3.4 Limites et ordre

Il arrive parfois, lors de l'étude d'une fonction, qu'on ne détermine pas directement la valeur d'une limite. On peut par exemple la majorer, la minorer, voire les deux en même temps !
Voici une proposition et un théorème, utiles lorsque le calcul d'une limite est compliqué.

Proposition 4 : Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathcal{D}$.
Soit a un réel, ou valant $-\infty$ ou $+\infty$. On suppose que :

$$\forall x \in \mathcal{D}, \quad f(x) \leq g(x).$$

On a alors :

$$\boxed{\lim_{x \to a} f(x) \leq \lim_{x \to a} g(x).}$$

exemple : Soient $f(x) = x + 1$ *et* $g(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 2}$.
f *est clairement définie sur* $\mathbb{R}$. *De plus,* g *est définie pour tout* x *réel vérifiant* $x^2 + 2x + 2 \geq 0$. *Or,*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^2 + 2x + 2 = (x^2 + 2x + 1) + 1 = (x + 1)^2 + 1 \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}.$$

Par conséquent, g *est aussi définie sur* $\mathbb{R}$. *On a par ailleurs que* $g(x)^2 = f(x)^2 + 1, \forall x \in \mathbb{R}$. *Ainsi :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x)^2 \geq f(x)^2, f(x) \geq 0 \text{ et } g(x) \geq 0\,;$$

donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) \geq f(x).$$

Ainsi, par la ***Proposition 5*** *on a :* $\lim_{x \to +\infty} g(x) \geq \lim_{x \to +\infty} f(x)$.
Or, comme $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, *on en déduit nécessairement :* $\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$.

Remarques :

1. On aurait aussi pu montrer que $\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ par composition des limites (c'est un bon exercice !).
2. **ATTENTION !** Soit a un réel, ou valant $+\infty$ ou $-\infty$. On a :
$$\forall x \in \mathcal{D}, f(x) < g(x) \not\Longrightarrow \lim_{x \to a} f(x) < \lim_{x \to a} g(x).$$
En revanche, on a :
$$\forall x \in \mathcal{D}, \quad f(x) < g(x) \quad \Longrightarrow \quad \lim_{x \to a} f(x) \leq \lim_{x \to a} g(x).$$
On dit qu'à la limite, les inégalités strictes deviennent larges !

   exemple : Soient $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ *et* $g : x \mapsto \frac{2}{x}$, *définies sur* $]0; +\infty[$.
   On a clairement que pour tout $x > 0$, $f(x) < g(x)$.
   En revanche, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0 = \lim_{x \to +\infty} g(x)$ *!*

<u>Théorème 4</u> : (*Théorème d'encadrement ou Théorème des gendarmes*)
Soient f, g et h trois fonctions définies sur $\mathcal{D}$. Soient a et L des réels, $-\infty$ ou $+\infty$.
On suppose que :

$$\forall x \in \mathcal{D}, \quad f(x) \leq g(x) \leq h(x).$$

On a alors :

$$\boxed{\lim_{x\to a} f(x) = L = \lim_{x\to a} h(x) \quad \Longrightarrow \quad \lim_{x\to a} g(x) = L.}$$

exemple : Soient $f(x) = \frac{1}{x^2}, g(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{x^2}$ *et* $h(x) = \frac{x+1}{x^2}$, *trois fonctions définies sur* $[1;+\infty[$.
Sur $[1;+\infty[$, *on a clairement (ou montrez-le rigoureusement) que* $\sqrt{x+1} \geq 1$, *et* $\sqrt{x+1} \leq x+1$. *Ainsi, on a bien :*

$$\forall x \in [1;+\infty[, \quad f(x) \leq g(x) \leq h(x).$$

De plus, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, *et par le* ***Théorème 2****,* $\lim_{x\to+\infty} h(x) = 0$.
Par conséquent, par le ***Théorème des gendarmes****,* $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$.

<u>Démonstration</u> : Soit L un réel.
Sous les hypothèses du théorème, montrons que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L = \lim_{x\to-\infty} h(x) \Longrightarrow \lim_{x\to-\infty} g(x) = L$.
Il faut montrer alors que :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists M \in \mathbb{R} \text{ tel que } \forall x < M, \quad g(x) \in]L-\varepsilon; L+\varepsilon[.$$

Soit alors $\varepsilon > 0$. On a, par définition :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L \quad \Longrightarrow \quad \exists M_1 \in \mathbb{R} \text{ tel que } \forall x < M_1, \quad f(x) \in]L-\varepsilon; L+\varepsilon[$$
$$\text{et}$$
$$\lim_{x\to-\infty} h(x) = L \quad \Longrightarrow \quad \exists M_2 \in \mathbb{R} \text{ tel que } \forall x < M_2, \quad h(x) \in]L-\varepsilon; L+\varepsilon[.$$

Ainsi :

$$\forall x < Min(M_1; M_2), \quad L-\varepsilon < f(x) \leq g(x) \leq h(x) < L+\varepsilon.$$

Par conséquent, en notant $M = Min(M_1; M_2)$, on a :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists M \in \mathbb{R} \text{ tel que } \forall x < M, \quad g(x) \in]L-\varepsilon; L+\varepsilon[.$$

□

Remarque : Pourquoi ce théorème est appelé théorème des gendarmes ? Je laisse le soin à chacun d'en donner une explication. Je préfère garder le silence sur ma version, de peur de perdre toute crédibilité !

3 Continuité

Dans cette partie, comme son nom l'indique, nous allons nous intéresser à la continuité d'une fonction. De manière intuitive, une fonction est continue si on peut tracer sa courbe représentative dans un repère sans lever le crayon (crayon à papier en forçant comme des brutes pour les garçons, et le magnifique stylo rose à paillettes pour les demoiselles !).
Bien évidemment, cette définition n'est pas du tout mathématique, mais gardez-là en tête.
Voici une définition bien plus rigoureuse (**et surtout à retenir !**).

Définition : Soit f une fonction définie sur $\mathcal{D}$ et soit $a \in \mathcal{D}$.
On dit que f est *continue en a* si :

$$\boxed{\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = f(a).}$$

On dit que f est continue sur $\mathcal{D}$ si f est continue en tout point de $\mathcal{D}$.

Proposition 5 : Les fonctions polynômes, rationnelles, valeur absolue et racine carrée sont continues sur leur domaine de définition.

Proposition 6 : La somme, le produit, le quotient (lorsque le dénominateur ne s'annule pas) et la composée de fonctions continues sont continues.

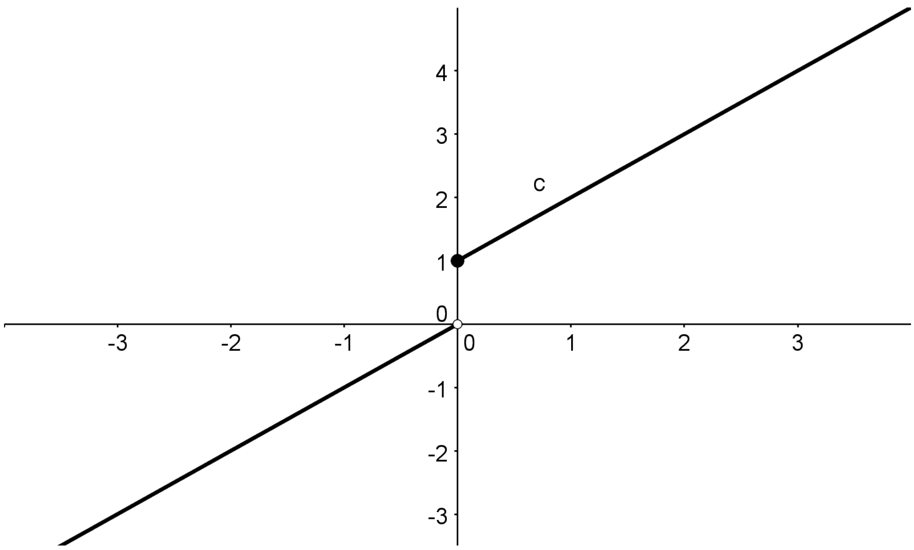
exemple : Donnons un exemple de fonction f non continue en 0.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} x \text{ si } x < 0 \\ x+1 \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$.
On a :

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} x = 0\,;$$

et

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} x + 1 = 1 = f(0).$$

Par conséquent, $\lim_{x \to 0^-} f(x) \neq \lim_{x \to 0^+} f(x)$, *donc f n'est pas continue en* 0.

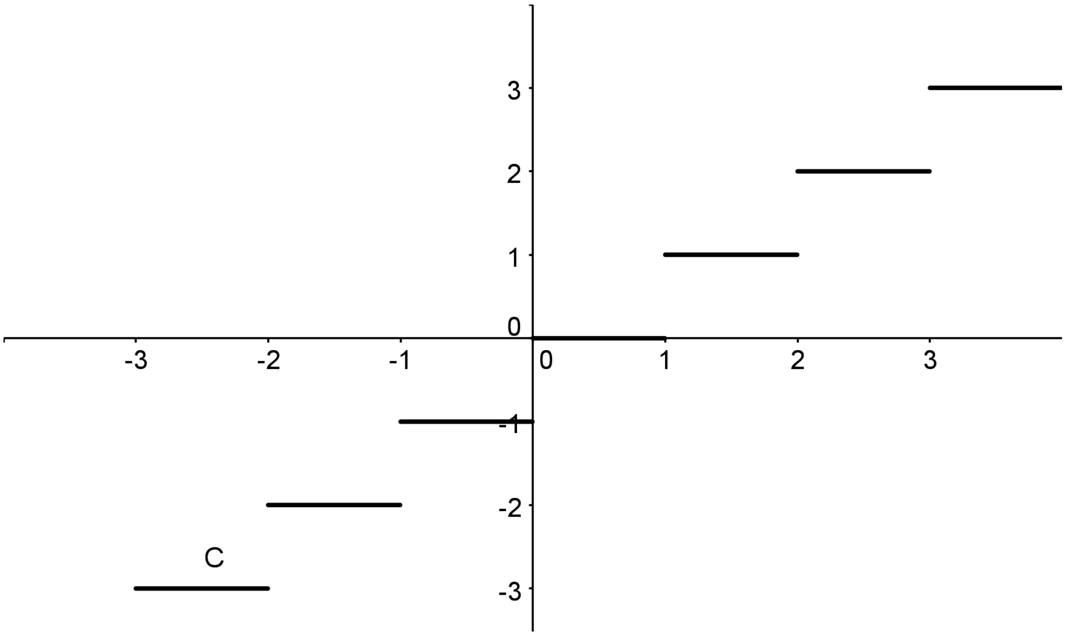


Exemple de fonction discontinue en 0.

Définition : On appelle *fonction partie entière*, notée E, la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, E(x) = n, \text{ où } n \text{ est l'unique entier tel que } n \leq x < n+1.$$

Proposition 7 : La fonction partie entière est discontinue en tout point $a \in \mathbb{Z}$.



Fonction partie entière.

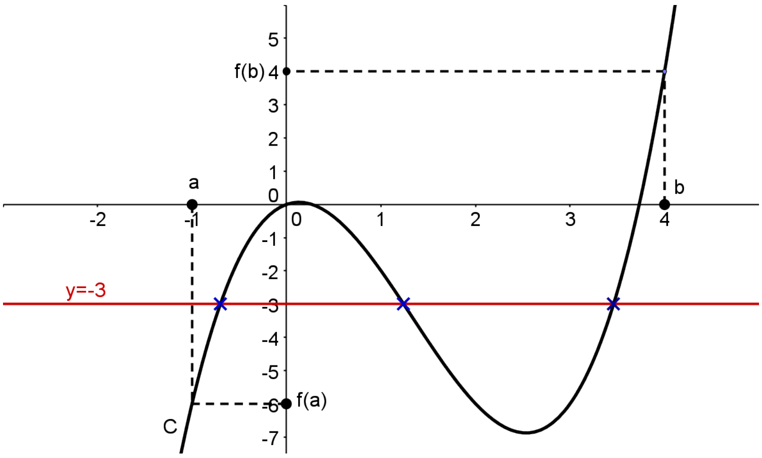
Voici un théorème qui va jouer un rôle capital dans l'étude des fonctions !
Sortez ce théorème le soir entre amis, lors d'une discussion. On vous forcera le respect !

Théorème 5 : (*Théorème des Valeurs Intermédiaires*)
Soit f une fonction continue sur $[a;b]$ (avec $a < b$). Alors :

$$\boxed{\text{Pour tout réel } m \text{ compris entre } f(a) \text{ et } f(b), \text{ il existe } x_0 \in [a;b] \text{ tel que } f(x_0) = m.}$$

exemple : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 4x^2 + x$.
- *f est une fonction polynômiale, donc continue sur $\mathbb{R}$.*
- *$f(-1) = -6$ et $f(4) = 4$.*
- *$-3 \in [-6;4]$.*

*Ainsi, par le **Théorème des Valeurs Intermédiaires**, il existe au moins un réel $x_0 \in [-1;4]$, tel que $f(x_0) = -3$. (Ici, il y en a trois !).*



Exemple d'application du Théorème des Valeurs Intermédiaires (TVI).

Je vous rassure tout de suite, je ne suis pas souligne-les-mots-ophile ! L'hypothèse de la continuité de la fonction dans l'énoncé du théorème est mise en valeur, car elle est fondamentale, et souvent oubliée par les élèves. La sentence est parfois terrible. Beaucoup de lycéens perdirent la vie suite à cette erreur fatale. Prions pour eux, mes frères.
Bon j'arrête ici l'humour à deux euros. Donnons un exemple qui montre l'importance de la continuité de la fonction.

exemple : Considérons la fonction partie entière notée E, sur l'intervalle $[0;2[$.
Sur $[0;1[$, E vaut 0 ; tandis que sur $[1;2[$, E vaut 1.
On a bien $\frac{1}{2}$ compris entre 0 et 1, mais pour tout x compris entre 0 et 2, $E(x) \neq \frac{1}{2}$!
Ceci est dû au fait que E n'est pas continue en 1.

Le corollaire qui suit est plus puissant, mais plus restrictif. Il donne l'unicité du réel x_0, pourvu qu'on ajoute dans la recette un ingrédient important : la stricte monotonie.

Rappels :

1. Une fonction f est croissante (respectivement décroissante) sur $\mathcal{D}$ si :
$$\forall a \in \mathcal{D}, \forall b \in \mathcal{D}, \quad a < b \Longrightarrow f(a) \leq f(b) \text{ (respectivement } f(a) \geq f(b)).$$
2. Une fonction f est strictement croissante (respectivement décroissante) sur $\mathcal{D}$ si :
$$\forall a \in \mathcal{D}, \forall b \in \mathcal{D}, \quad a < b \Longrightarrow f(a) < f(b) \text{ (respectivement } f(a) > f(b)).$$
3. Une fonction est strictement monotone sur $\mathcal{D}$ si elle est strictement croissante sur $\mathcal{D}$, ou strictement décroissante sur $\mathcal{D}$.

Corollaire : Soit f une fonction continue et strictement monotone sur $[a;b]$ (où $a < b$). Alors :

$$\boxed{\text{Pour tout réel } m \text{ compris entre } f(a) \text{ et } f(b) \text{, il existe un unique } x_0 \in [a;b] \ / \ f(x_0) = m.}$$

exemple : On reprend la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 4x^2 + x$

- *f est strictement croissante sur $[-1;0]$.*
- *$f(-1) = -6$ et $f(0) = 0$.*
- *f est continue sur $\mathbb{R}$, donc continue sur $[-1;0]$.*
- *$-3 \in [-6;0]$.*

*Ainsi, par le **corollaire**, il existe un unique réel $x_0 \in [-1;0]$ tel que $f(x_0) = -3$.*

4 Dérivabilité

Cette partie est très importante dans l'étude d'une fonction. Souvenez-vous, il y a un lien (bien plus fort que le mariage!) qui unit le signe de la dérivée d'une fonction et le sens de variation de celle-ci. On rappelle ici la notion de tangente à une courbe en un point, et les formules de dérivation, à savoir parfaitement, sur le bout des doigts et des orteils!

4.1 Définition et premières propriétés

Définition : (Episode 1) Soient a un réel et f une fonction définie sur $\mathcal{D}$, contentant a.
On dit que f est *dérivable* en a si :

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \text{ et } \lim_{x \to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \text{ existent, sont finies et égales.}$$

Dans ce cas, on note $f'(a)$ cette limite, appelée *nombre dérivée de f en a.*

Définition : (Episode 2) Soient a un réel et f une fonction définie sur $\mathcal{D}$, contentant a.
On dit que f est *dérivable* en a si :

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h)-f(h)}{h} \text{ et } \lim_{h \to 0^-} \frac{f(a+h)-f(h)}{h} \text{ existent, sont finies et égales.}$$

Dans ce cas, on note $f'(a)$ cette limite, appelée *nombre dérivée de f en a.*

Remarque :
1. On utilise aussi bien l'une ou l'autre définition, à vous de savoir manipuler les deux!
2. On dit que f est dérivable sur $\mathcal{D}$ si f est dérivable en tout point de $\mathcal{D}$.

Proposition 8 :
1. Les fonctions polynômes et rationnelles sont dérivables sur leur ensemble de définition.
2. Les fonctions racine carrée et valeur absolue ne sont pas dérivables en 0.

Démonstration : On ne démontre ici que le point 2.
- Pour la fonction racine carrée :
$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{0}}{x-0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty.$$
Donc la fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0.

- Pour la fonction valeur absolue, on a :
$$\lim_{x \to 0^-} \frac{|x|-|0|}{x-0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-x}{x} = -1 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to 0^+} \frac{|x|-|0|}{x-0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x} = +1.$$
Ainsi, $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{|x|-|0|}{x-0} \neq \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{|x|-|0|}{x-0}$, donc la fonction valeur absolue n'est pas dérivable en 0.

□

Théorème 6 : Toute fonction dérivable en a est continue en a.

ATTENTION, la réciproque est fausse!!
exemple : Soit f la fonction valeur absolue.
f est continue sur $\mathbb{R}$, mais f n'est pas dérivable en 0! (cf **Proposition 9***)*

4.2 Interprétation géométrique

$\boxed{f'(a) \text{ est le coefficient directeur de la tangente à } \mathcal{C} \text{ au point d'abscisse } a.}$

Cet encadré est très important. Il illustre en quelque sorte la proposition suivante :

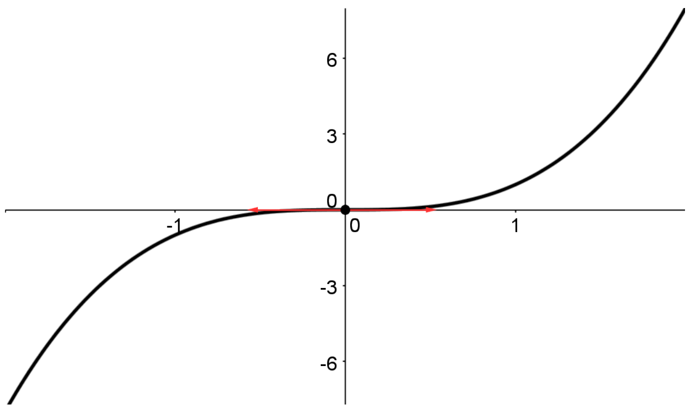
Proposition 9 : Soit f une fonction définie sur $[a;b]$ (où $a < b$). Alors :

$$\boxed{\begin{array}{ll} \forall x \in [a;b], & f'(x) \geq 0 \Longleftrightarrow f \text{ croissante sur } [a;b]. \\ \forall x \in [a;b], & f'(x) > 0 \Longrightarrow f \text{ strictement croissante sur } [a;b]. \\ \forall x \in [a;b], & f'(x) \leq 0 \Longleftrightarrow f \text{ décroissante sur } [a;b]. \\ \forall x \in [a;b], & f'(x) < 0 \Longrightarrow f \text{ strictement décroissante sur } [a;b]. \\ \forall x \in [a;b], & f'(x) = 0 \Longleftrightarrow f \text{ constante } [a;b]. \end{array}}$$

En effet, $f'(a) \geq 0$ implique que la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse a est croissante et donc que la fonction f, approximée par cette tangente au voisinage de a, est croissante.

Remarque : Les plus attentifs, ou les moins endormis (c'est selon le point de vue...), auront noté qu'à la deuxième et à la quatrième ligne, il n'y a pas d'équivalence, mais seulement une implication...
En effet, par exemple, si une fonction est strictement croissante sur $[a;b]$, on n'a pas **nécessairement** que la dérivée est **partout** strictement positive sur $[a;b]$! En fait, elle est partout strictement positive, **sauf éventuellement en un nombre fini de points**, où elle est nulle. Je vous assure, ce n'est pas une arnaque ! Les mathématiciens ne sont pas des truands (contrairement aux physiciens ou aux chimistes, qui arrangent souvent les résultats de leurs expériences !...). Pour preuve, regardons ensemble l'exemple suivant.

exemple : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$. Cette fonction est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. En revanche, $f'(x) = 3x^2$, et du coup, $f'(0) = 0$! !
Donc la fonction cubique est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, mais sa dérivée s'annule en un point : 0.



Fonction cubique et tangente horizontale au point d'abscisse 0.

Proposition 10 : La tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse a, dans un repère, a pour équation :

$$\boxed{y = f'(a) \times (x - a) + f(a).}$$

Démonstration : On sait que la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse a a pour equation $y = mx + p$, où m est le coefficient directeur. Par définition donc, on a que $m = f'(a)$. Ainsi, l'équation de la tangente est de la forme $y = f'(a) \times x + p$.
De plus, la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse a passe par le point de coordonnées $(a; f(a))$.
Par conséquent, on a : $f(a) = f'(a) \times a + p \Longleftrightarrow p = f(a) - f'(a) \times a$.
Donc l'équation de la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse a est :

$$y = f'(a) \times x + f(a) - f'(a) \times a \quad \Longleftrightarrow \quad y = f'(a) \times (x - a) + f(a).$$

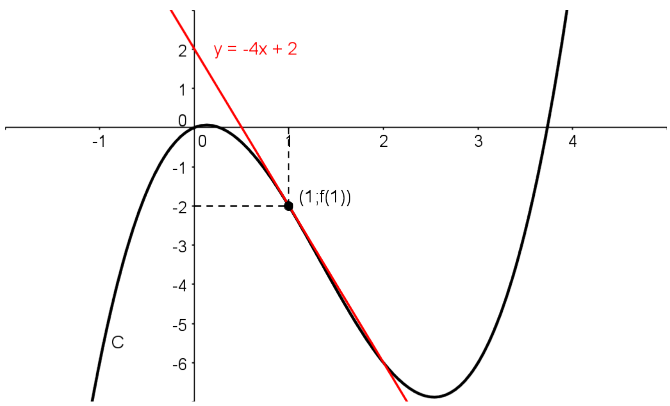
$\square$

exemple : On reprend la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 4x^2 + x$.
On veut déterminer l'équation de la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 1.
On a $f(1) = -2$ et (revoir, si besoin est, les formules de dérivation ci-après) :

$$f'(x) = 3x^2 - 8x + 1, \text{ donc } f'(1) = -4.$$

Par conséquent, l'équation de la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse -1 est :

$$y = -4(x - 1) - 2 \quad \Longleftrightarrow \quad y = -4x + 2.$$



Tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 1 .

4.3 Dérivée des fonctions usuelles

Voici un petit tableau donnant la dérivée des fonctions usuelles, à connaitre sur le bout des doigts et des...

$f(x)$	$f'(x)$	Domaine de dérivation
$ax+b$	a	$\mathbb{R}$
$x^n (n \in \mathbb{Z})$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$\frac{-1}{x^2}$	$]-\infty;0[$ ou $]0;+\infty[$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0;+\infty[$
$cos(x)$	$-sin(x)$	$\mathbb{R}$
$sin(x)$	$cos(x)$	$\mathbb{R}$

4.4 Propriétés des dérivées

Proposition 11 : (*Somme, produit, quotient*)
Soient f et g deux fonctions dérivables sur $\mathcal{D}$. Alors :

1. $f+g$ est dérivable sur $\mathcal{D}$ et : $\boxed{(f+g)' = f' + g'.}$
2. $f \times g$ est dérivable sur $\mathcal{D}$ et : $\boxed{(f \times g)' = f' \times g + f \times g'.}$
3. Si, pour tout x dans $\mathcal{D}$, on a $g(x) \neq 0$, $\frac{f}{g}$ est dérivable sur $\mathcal{D}$ et : $\boxed{(\frac{f}{g})' = \frac{f' \times g - f \times g'}{g^2}.}$

exemple :

1. *Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x-5)(3x^2 + \frac{1}{x})$. On a :*
$$(2x-5)' = 2 \qquad et \qquad (3x^2 + \frac{1}{x})' = 6x - \frac{1}{x^2}.$$
Donc :
$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 2 \times (3x^2 + \frac{1}{x}) + (2x-5) \times (6x - \frac{1}{x^2})...$$
Je vous laisse terminer les calculs ! (Moi fainéant ?)
2. *Soit g la fonction définie sur $]1;+\infty[$ par $g(x) = \frac{3x-5}{x-1}$. On a :*
$$g'(x) = \frac{3(x-1)-(3x-5)\times 1}{(x-1)^2}, \quad \forall x \in]1;+\infty[.$$

Proposition 12 : (*Composée*)
Soient f une fonction dérivable sur un intervalle I et g une fonction dérivable sur un intervalle J, tels que $g(J) \subseteq I$. Alors la fonction $f \circ g$ est dérivable sur J, et on a, pour tout $x \in J$:

$$\boxed{(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \times g'(x).}$$

exemple : Soit f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$. Soit g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3 - 1$. On a alors que $f \circ g$ est définie si $g(x) \geq 0$, c'est-à-dire si $x \geq 1$.
De plus, f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et g est dérivable sur $\mathbb{R}$. Par conséquent, $f \circ g$ est dérivable sur $]1;+\infty[$ (on exclut la valeur 1, car $g(1) = 0$ et f n'est pas dérivable en 0) et on a :

$$\forall x > 1, \quad (f \circ g)'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^3-1}} \times (3x^2).$$

5 Parité d'une fonction

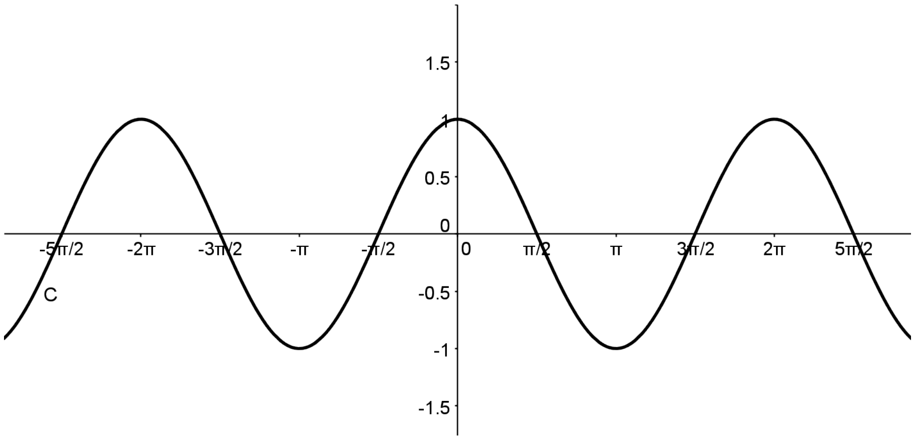
Celui qui me dit qu'une fonction est paire si elle est divisible par 2 sort immédiatement !!

Définition : Une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est dite *paire* si :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = f(x).$$

exemple : La fonction cosinus est paire.

Remarque : Géométriquement, cela se traduit par le fait que $\mathcal{C}$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.



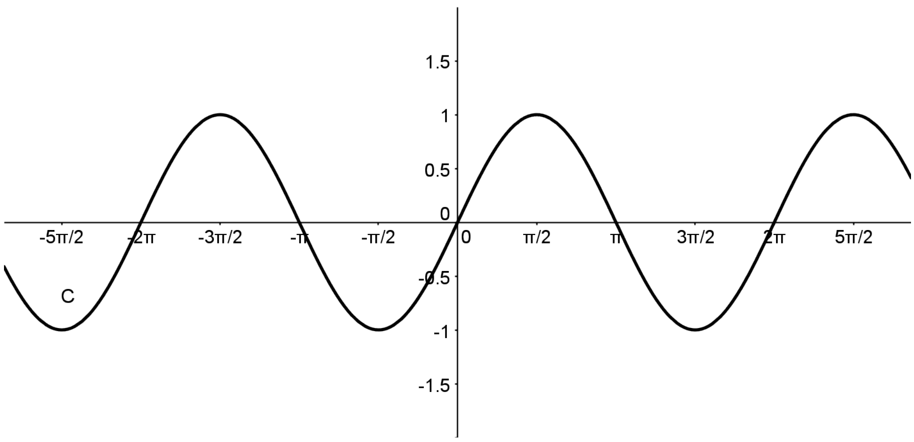
Fonction cosinus.

Définition : Une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est dite *impaire* si :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = -f(x).$$

exemple : La fonction sinus est impaire.

Remarque : Géométriquement, cela se traduit par le fait que $\mathcal{C}$ est symétrique par rapport à l'origine du repère.



Fonction sinus.

Remarque : L'avantage d'une fonction paire ou impaire est qu'il suffit de l'étudier sur $[0; +\infty[$, par exemple. Par symétrie, on obtient l'étude complète sur $\mathbb{R}$.

6 Périodicité

Définition : On dit qu'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est *k-périodique* (ou *périodique de période k*), si :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x+k) = f(x).$$

exemple : Les fonctions cosinus et sinus sont 2π-périodiques.

Remarque : Un avantage d'une fonction k-périodique est qu'il suffit de l'étudier sur un intervalle de longueur k (comme par exemple $[0;k]$). Par périodicité, on obtient l'étude complète sur $\mathbb{R}$.

Amusez-vous à faire l'étude des fonctions sinus et cosinus, en utilisant leur parité et leur périodicité !

Dorénavant, l'étude des fonctions n'a plus de secret pour vous !!

7 Exemple d'étude complète d'une fonction

Dans cette dernière partie, je vous donne l'exemple type d'exercice à savoir refaire. Comme vous avez été attentifs du début à la fin, cette exo vous paraîtra facile ! Attention tout de même à l'excès de confiance et concentrez-vous. Un accident est si vite arrivé...

On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{2x^2-5x+1}{x-2}$.
On appellera $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le repère $(O; \vec{i}\,; \vec{j}\,)$.

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Déterminer le plus grand ensemble sur lequel cette fonction est continue. Justifier.
3. Etudier la parité de f.
4. Déterminer l'expression de f', fonction dérivée de f.
5. Déterminer le sens de variation de f.
6. Déterminer les limites de cette fonction sur les bords de son domaine de définition.
   $\mathcal{C}$ admet-elle des asymptotes horizontales et/ou verticales ? Si oui, lesquelles ?
7. Déterminer les réels a, b et c tels que, pour tout x réel différent de 2, $f(x) = ax + b + \frac{c}{x-2}$.
   En déduire l'équation de l'asymptote oblique à $\mathcal{C}$.
8. Donner l'équation de la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.
9. Tracer $\mathcal{C}$ minutieusement.

Réponses :

1. *La fonction f est une fraction rationnelle. Elle est donc définie partout, sauf pour les valeurs x annulant $x - 2$. Donc f est définie sur $\mathbb{R} - \{2\}$.*
2. *f étant une fraction rationnelle, elle est continue sur son domaine de définition entier, c'est-à-dire sur $\mathbb{R} - \{2\}$ (cf **Proposition 6**).*
3. *Soit $x \neq 2$.*
   On a $f(-1) = \frac{-8}{3}$ et $f(1) = 3$, donc $f(-1) \neq f(1)$ et $f(-1) \neq -f(1)$.
   Par suite, f n'est ni paire, ni impaire.
4. *f est dérivable sur $\mathbb{R} - \{2\}$, car f est une fraction rationnelle (cf **Proposition 9**). Soit alors $x \neq 2$.*
   $$f'(x) = \frac{(4x-5)(x-2) - 1 \times (2x^2-5x+1)}{(x-2)^2} = ... = \frac{2x^2-8x+9}{(x-2)^2}.$$
5. *Pour tout $x \neq 2$, $(x-2)^2 > 0$.*
   Il reste alors à déterminer le signe de $2x^2 - 8x + 9$. On calcule le discriminant, Δ, et on trouve :
   $$\Delta = (-8)^2 - 4 \times 2 \times 9 < 0.$$
   Ainsi, pour tout $x \neq 2$, $2x^2 - 8x + 9 \neq 0$. On a par ailleurs que $2x^2 - 8x + 9$ est du signe de 9, donc positif. On a alors $2x^2 - 8x + 9 > 0$ pour tout $x \neq 2$.
   Par conséquent, pour tout $x \neq 2$, $f'(x) > 0$. Ainsi, sur $\mathbb{R} - \{2\}$, f est strictement croissante.
6. *On doit déterminer les limites en $-\infty$, $+\infty$, 2^- et 2^+.*
   $$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2}{x} = \lim_{x\to-\infty} 2x = -\infty.$$
   $$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2}{x} = \lim_{x\to+\infty} 2x = +\infty.$$
   $\lim_{x\to2^-} 2x^2 - 5x + 1 = -1$ et $\lim_{x\to2^-} x - 2 = 0^-$. *Donc par quotient,* $\lim_{x\to2^-} f(x) = +\infty$.
   $\lim_{x\to2^+} 2x^2 - 5x + 1 = -1$ et $\lim_{x\to2^+} x - 2 = 0^+$. *Donc par quotient,* $\lim_{x\to2^+} f(x) = -\infty$.

On en déduit alors que $\mathcal{C}$ admet une asymptote verticale d'équation $x = 2$.
Par ailleurs, comme $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, *$\mathcal{C}$ n'admet pas d'asymptote horizontale.*

7. *Soit* $x \neq 2$. *L'idée est de partir de* $ax + b + \frac{c}{x-2}$, *de tout mettre sur le même dénominateur, et d'identifier les coefficients au numérateur pour trouver les valeurs des trois inconnues. Voyez plutôt :*

$$ax + b + \tfrac{c}{x-2} = \tfrac{ax(x-2)}{x-2} + \tfrac{b(x-2)}{x-2} + \tfrac{c}{x-2} = \ldots = \tfrac{ax^2+(-2a+b)x+(-2b+c)}{x-2}.$$

On identifie alors $ax^2 + (-2a+b)x + (-2b+c)$ *avec* $2x^2 - 5x + 1$. *On a alors :*

$$\begin{cases} a = 2 \\ -2a + b = -5 \\ -2b + c = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 2 \\ b = -1 \\ c = -1 \end{cases}$$

Donc pour tout $x \neq 2$, $f(x) = 2x - 1 - \frac{1}{x-2}$.
On a alors, pour tout $x \neq 2$, $f(x) - (2x-1) = \frac{1}{x-2}$, *et :*

$$\lim_{x\to-\infty} \tfrac{1}{x-2} = \lim_{x\to+\infty} \tfrac{1}{x-2} = 0.$$

Ainsi, la droite d'équation $y = 2x - 1$ *est asymptote oblique à $\mathcal{C}$, au voisinage de* $-\infty$ *et* $+\infty$.

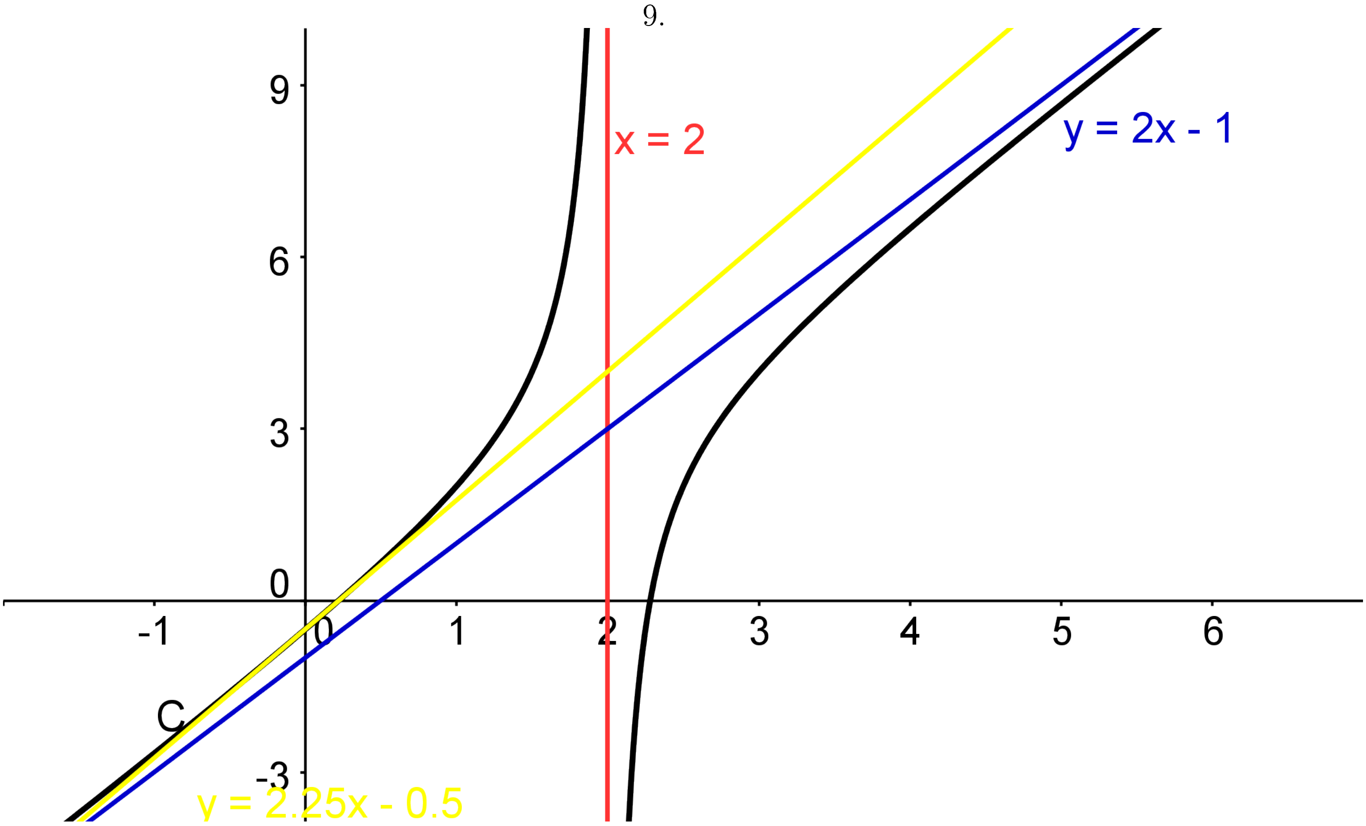
8. *La tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse* 0 *a pour équation :*

$$y = f'(0) \times (x - 0) + f(0).$$

Or, $f'(0) = \frac{9}{4}$ *et* $f(0) = -\frac{1}{2}$.
Ainsi, la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0 *a pour équation :*

$$y = \tfrac{9}{4}x - \tfrac{1}{2}.$$

9.



Graphe de la courbe représentative de la fonction f.