

Table des matières

1	Première approche des équations différentielles	3
2	Définition et propriétés	4
3	Résolution des équations différentielles de la forme $y' = ay + b$	7
3.1	Cas où $b = 0$, c'est-à-dire $y' = ay$	7
3.2	Cas où $b \neq 0$	7

Un mathématicien fou (pléonasme) monte dans un bus et se met à menacer tout le monde :

" Je vais vous dériver ! "

Tout le monde est effrayé et se sauve, sauf une jeune dame qui reste tranquille.

Le mathématicien fou arrive vers elle et dit :

" Tu n'as pas peur ? Je vais te dériver ! "

La jeune dame répond :

" Non, je n'ai pas peur, je suis e^x . "

Introduction

Nous allons étudier dans ce chapitre une fonction extrêmement importante pour la suite : la fonction **exponentielle** ! Elle entre dans le top 5 des fonctions à connaître parfaitement (avec la fonction carrée, racine carrée, inverse...), occupant même, à mon humble avis, la première place du podium.

Pourquoi est-elle si importante ? "M'sieur, à quoi va-t-elle nous servir ?" L'étude des nombres complexes, que vous étudierez en cours d'année, s'appuie sur la connaissance de la fonction exponentielle (vous allez voir, elle va grandement nous simplifier la vie !). Vous allez de nouveau la rencontrer en probabilités (je vous vois vous gratter la tête, en vous demandant quel lien peut-il y avoir entre des probas et cette fonction !). Elle permet aussi de résoudre des équations différentielles (que nous allons étudier ici). Et ce ne sont que certaines des utilités de l'exponentielle, en classe de Terminale S ! Elle est aussi à la base de la théorie de Fourier, que les élèves de physiques ou de maths étudieront après le lycée.

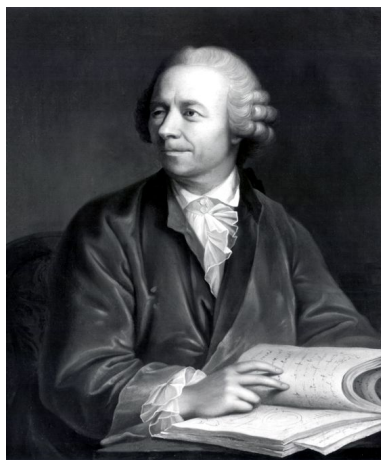
Vous allez me dire : "Oui mais moi après le bac, je vais en biologie, alors je m'en fiche !" Eh bien détrompez-vous ! Car même en biologie la fonction exponentielle est utile. Si vous continuez vos études dans les sciences, quel qu'en soit la branche, vous allez la retrouver. Alors sympathisez avec elle de suite !

Je vous l'affirme : cette fonction est un véritable couteau suisse. Gardez-la toujours sur vous, elle vous aidera dans votre survie d'étudiant, au milieu de la jungle de la Connaissance.

L'apparition de la fonction exponentielle est essentiellement due aux travaux des différents astronomes, notamment au cours du XVII^{ème} siècle avec Nepler et Kepler, qui eurent besoin de nouveaux outils (notamment les logarithmes, que l'on étudiera en surface plus tard) pour réaliser des calculs devenus bien compliqués. C'est Descartes qui, toujours au XVII^{ème} siècle, donna une première définition de l'exponentielle. Puis Leibniz et Euler étudièrent cette fonction, qui donna un véritable coup d'accélérateur dans l'avancée scientifique.



René Descartes



Leonhard Euler



Gotfried Wihelm von Leibniz

On peut introduire de multiples façons la fonction exponentielle. Celle que je vous propose est utile en terminale S car en lien avec les équations différentielles.

1 Première approche des équations différentielles

Définition : Une *équation différentielle* est une équation dont la variable est une **fonction**, le plus souvent notée y , et faisant intervenir un lien entre cette fonction et ses dérivées successives.

exemple : $y' = 2y + 1$.

Cela signifie que, pour tout x dans le domaine de définition de y , $y'(x) = 2 \times y(x) + 1$.

Proposition 1 :

1. Si une équation différentielle admet une solution, alors elle admet une infinité de solutions.
2. Si une équation différentielle admet des solutions, alors elle admet une unique solution vérifiant une *condition initiale*, du type $y(a) = b$, où a et b sont des réels, a étant dans le domaine de définition de la fonction y .

exemple : Soit $(E) : y' = 3$ une équation différentielle.

On a clairement que toutes les solutions de (E) sont du type $y(x) = 3x + k$, pour tout x réel, où k est réel (par exemple, $y(x) = 3x + 2$). On a donc bien une infinité de solutions de l'équation (E) . Deux solutions se différencient par la valeur du réel k .

Parmi cette infinité de solutions, une seule vérifie la condition initiale $y(0) = 5$. Votre mission, si vous l'acceptez, est de trouver cette unique solution, que l'on notera f .

On a alors f qui vérifie $(E) : y' = 3$ et $f(0) = 5$. Comme f vérifie (E) , on a que $f(x) = 3x + k$, pour tout x réel, où k est un réel. Il ne reste donc plus qu'à trouver la valeur de k , grâce à la condition initiale :

$$f(0) = 5 \iff 3 \times 0 + k = 5 \iff k = 5.$$

Donc la solution de $(E) : y' = 3$ avec pour condition initiale $y(0) = 5$ est la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 3x + 5$.

La résolution des équations différentielles du type $y' = a$, où a est un réel est très facile. Pour résoudre les équations différentielles du type $y' = ay + b$, où a et b sont réels, avec $a \neq 0$, on a besoin de notre Super Fonction exponentielle, que nous introduisons dans la partie qui suit.



2 Définition et propriétés

Définition : La fonction *exponentielle*, notée *exp*, est l'unique solution de l'équation différentielle :

$$\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases} .$$

La proposition suivante découle directement de la définition.

Proposition 2 :

1. La fonction exponentielle est dérivable sur \mathbb{R} .
2. $\exp(0) = 1$.

Corollaire : La fonction exponentielle est continue sur \mathbb{R} .

Démonstration : Par la **Proposition 2.1**, la fonction exponentielle est dérivable sur \mathbb{R} . On en déduit donc, par le **Théorème 6** du **Chapitre 1**, que la fonction exponentielle est continue sur \mathbb{R} . □

Notation : Plus souvent, on écrira e^x à la place de $\exp(x)$. Retenez les deux notations !
On note aussi $e^1 = e \simeq 2,71$.

Dans ce qui suit, nous allons donner des petites propriétés de l'exponentielle, à bien retenir !
Les méthodes de démonstrations sont intéressantes à savoir refaire. Elles ne sont pas longues, donc astiquer votre coude avec de l'huile, et au travail !

Proposition 3 :

1. $\forall x \in \mathbb{R}, e^{-x} = \frac{1}{e^x}$.
2. $\forall x \in \mathbb{R}, e^x > 0$.
3. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, e^{x+y} = e^x e^y$.
4. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, e^{x-y} = e^x e^{-y} = \frac{e^x}{e^y}$.
5. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, (e^x)^y = e^{xy} = (e^y)^x$.

Démonstration :

1. Le but est de montrer que, pour tout x réel, $e^x e^{-x} = 1$. On aura le résultat voulu.
Par la règle de dérivation du produit de deux fonctions, on a :

$$(\exp(x)\exp(-x))' = \exp(x)' \times \exp(-x) + \exp(x) \times \exp(-x)'$$

Or, $\exp(x)' = \exp(x)$, et par composée, $\exp(-x)' = \exp'(-x) \times (-1) = \exp(-x) \times (-1)$.

Donc : $(\exp(x)\exp(-x))' = \exp(x) \times \exp(-x) - \exp(x) \times \exp(-x) = 0$, pour tout x réel.

Or, une fonction dont la dérivée est partout nulle est une fonction constante.

Donc il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout x réel, $e^x e^{-x} = c$.

Or, on a $e^0 e^{-0} = e^0 e^0 = 1$.

Par conséquent, $c = 1$ (car l'égalité $e^x e^{-x} = c$ est vraie en particulier pour $x = 0$!). Ainsi :

$$\forall x \in \mathbb{R}, e^x e^{-x} = 1 \iff \forall x \in \mathbb{R}, e^{-x} = \frac{1}{e^x} .$$

2. Ce point découle (mais pas directement) du premier !

En effet, si pour tout x réel, $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$, on a nécessairement que, pour tout x réel, $e^x \neq 0$.

De plus, $e^0 = 1$ et la fonction exponentielle est continue sur \mathbb{R} .

Nous allons maintenant procéder par l'absurde (revoir si nécessaire son mode de fonctionnement dans le **Chapitre 1, Proposition 1**). On suppose donc le contraire de ce qu'on veut montrer pour tomber sur une contradiction.

Question : Quel est le contraire de "Toutes les personnes en face de moi sont des femmes." ?... Facile non ? Eh bien oui, le contraire est : "Il y a **au moins** une personne en face de moi qui n'est pas une femme" (donc un homme... Faut suivre les enfants !). Ici, puisqu'on veut montrer que pour **tout** x réel, $e^x > 0$, supposons qu'il existe **au moins un réel** x_0 tel que $e^{x_0} \leq 0$.

Or, par 1, $e^x \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Donc $e^{x_0} < 0$.

On a donc $e^0 = 1 > 0$ et $e^{x_0} < 0$. De plus la fonction exponentielle est continue, donc par le théorème des valeurs intermédiaires (cf **Chapitre 1**), il existe $y \in \mathbb{R}$ tel que $e^y = 0$, ce qui est impossible par le point 1. Donc il n'existe pas de $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $e^{x_0} \leq 0$. Ainsi, pour tout x réel, $e^x > 0$.

3. Admis

4. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$. Par 3, on a : $e^{x-y} = e^x e^{-y}$. Or, par 1, $e^{-y} = \frac{1}{e^y}$. D'où le résultat.

5. Admis.

(Vous pouvez cependant montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $exp(nx) = exp(x)^n$.)

□

Théorème 1 : La fonction exponentielle est **strictement croissante** sur \mathbb{R} .

Démonstration : Par la **Proposition 3.2**, on a que, pour tout x réel, $exp'(x) = exp(x) > 0$.

Ainsi, d'après la **Proposition 10** du **Chapitre 1**, exp est strictement croissante sur \mathbb{R} .

□

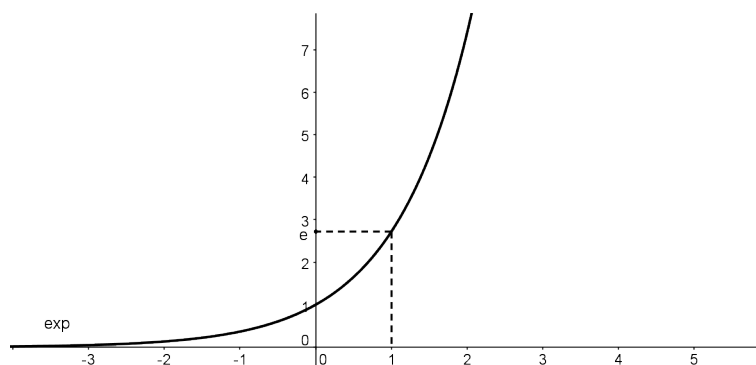
Corollaire : $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} : x < y \iff e^x < e^y$.

Démonstration : C'est la définition même d'une fonction strictement croissante sur \mathbb{R} !!!

□

Proposition 4 : $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0^+ ; \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$.

On a désormais tous les éléments nécessaires pour tracer la courbe de la fonction exponentielle, dans un repère orthonormé.



Fonction exponentielle.

Théorème 2 : (Croissance comparée)

$$\forall n \in \mathbb{N} : \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0.$$

Remarques :

1. Si on regarde les limites bien droit dans les yeux, on remarquera qu'on obtient deux FI. Il faut donc voir la fonction exponentielle comme le chef. Elle dicte sa loi devant les puissances de x , et donc c'est sa limite qui l'emporte, dans les deux cas. Cela provient du fait que la fonction exponentielle "croît plus vite, à partir d'un certain rang", que n'importe quelle puissance de x .
2. Ce théorème est aussi vrai pour $n \in \mathbb{Z}$, mais si $n < 0$, il n'y a plus de FI!!

La limite qui suit est importante ! Le style de la démonstration est à connaître **absolument** !
Si vous la maîtrisez, vous saurez retrouver très rapidement cette limite, et bien d'autres encore !
Les excuses du genre "Je ne me souvenais plus de la valeur de la limite..." ou "Alzheimer me guette !" ne seront pas recevables !!

Théorème 3 :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Démonstration : Cette démonstration repose exclusivement sur la définition du nombre dérivé (cf si besoin est le **Chapitre 1, Paragraphe 4**). On rappelle que $e^0 = 1$. Ainsi :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^0}{x - 0} = \text{exp}'(0) = \text{exp}(0) = 1.$$

□

Corollaire : Pour x au voisinage de 0 (c'est-à-dire très proche de 0) : $e^x \approx 1 + x$.

Proposition 5 : Soit I un intervalle de \mathbb{R} , et $u : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable. On a alors :

$$\text{exp}(u) \text{ est dérivable sur } I \text{ et } (\text{exp}(u(x)))' = u'(x) \times \text{exp}(u(x)), \forall x \in I.$$

exemple : Soit u la fonction définie sur \mathbb{R} par $u(x) = -2x^2 + 5x - 1$.
 u est évidemment dérivable sur \mathbb{R} , car c'est une fonction polynômiale. De plus, $u'(x) = -4x + 5, \forall x \in \mathbb{R}$.
On pose f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = e^{-2x^2+5x-1}$.
On a donc, par la **Proposition 5**, que f est dérivable sur \mathbb{R} et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = (-4x + 5)e^{-2x^2+5x-1}.$$

Démonstration : On utilise seulement la dérivée de la composée de deux fonctions. A vous de jouer (oui oui, je vous assure, on joue quand on fait des maths!).

□

3 Résolution des équations différentielles de la forme $y' = ay + b$

Les physiciens tombent parfois sur des équations différentielles, comme par exemple lors de l'étude du circuit RLC, au programme de terminale S (en tout cas à mon époque!). Et comme ils sont un peu fainéants sur les bords, ils demandent aux mathématiciens de résoudre leurs problèmes...

On ne peut donc malheureusement que constater que les matheux sont utiles, et pourtant incompris et méprisés dans ce monde ô combien hostile...

3.1 Cas où $b = 0$, c'est-à-dire $y' = ay$

Théorème 4 : Soit $(E) : y' = ay$ une équation différentielle, avec a réel non nul.

Les solutions de (E) sont les fonctions dérivables sur \mathbb{R} de la forme : $f : x \mapsto Ce^{ax}$, où $C \in \mathbb{R}$.

Autrement dit, f est solution de $(E) \iff \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = Ce^{ax}$, où $C \in \mathbb{R}$.

exemple : Soit $(E) : y' = 5y$ une équation différentielle.

Les solutions de (E) , définies et dérivables sur \mathbb{R} , sont de la forme : $f(x) = Ce^{5x}, \forall x \in \mathbb{R}$, où $C \in \mathbb{R}$.

Démonstration : Il est évident que la fonction $x \mapsto e^{ax}$ est solution de (E) .

Soit f une fonction définie sur \mathbb{R} . On peut toujours écrire f sous la forme : $f(x) = k(x)e^{ax}$

(Il suffit pour cela de poser $k(x) = \frac{f(x)}{e^{ax}}$; ce qui est possible car $e^{ax} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$!).

On a alors : $f'(x) = k'(x) \times e^{ax} + k(x) \times ae^{ax}, \forall x \in \mathbb{R}$.

Ainsi :

$$\begin{aligned} f \text{ solution de } (E) &\iff f' - af = 0 \\ &\iff k'(x)e^{ax} = 0, \forall x \in \mathbb{R} \\ &\iff k'(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R} \text{ (car } e^{ax} \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}) \\ &\iff k(x) = C, \forall x \in \mathbb{R}, \text{ où } C \in \mathbb{R} \text{ est une constante} \end{aligned}$$

Ainsi, f est solution de $(E) \iff f(x) = Ce^{ax}, \forall x \in \mathbb{R}$.

□

3.2 Cas où $b \neq 0$

Théorème 5 : Soit $(E) : y' = ay + b$ une équation différentielle, avec a et b des réels, et $a \neq 0$.

Les solutions de (E) sont les fonctions dérivables sur \mathbb{R} de la forme :

$$f : x \mapsto Ce^{ax} - \frac{b}{a}, \text{ où } C \in \mathbb{R}.$$

Autrement dit, f est solution de $(E) \iff f(x) = Ce^{ax} - \frac{b}{a}, \text{ où } C \in \mathbb{R}$.

exemple : Soit $(E) : y' = -2y + 5$ une équation différentielle. Les solutions de (E) , définies et dérivables sur \mathbb{R} , sont de la forme :

$$f(x) = Ce^{-2x} - \frac{5}{-2} = Ce^{-2x} + \frac{5}{2}, \forall x \in \mathbb{R}, \text{ où } C \in \mathbb{R}.$$

On peut contrôler que les fonctions de cette forme vérifient bien (E) : on les dérive, et on croise les doigts pour que l'équation différentielle soit vérifiée!

Démonstration : On doit démontrer une équivalence, c'est-à-dire les deux implications !

$\boxed{\Rightarrow}$ (L'implication la plus difficile... Tenez bon !) Soit g la fonction constante, définie sur \mathbb{R} , par $g(x) = -\frac{b}{a}$.
 g étant constante, on a que g est dérivable sur \mathbb{R} et $g'(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

On a donc : $a \times g(x) + b = a \times (-\frac{b}{a}) + b = 0 = g'(x), \forall x \in \mathbb{R}$.

Ainsi, g est solution de (E) !!

Soit f une autre solution de (E) . On a alors :

$$\begin{cases} (1) h' = ah + b. \\ (2) f' = af + b. \end{cases}$$

En faisant (2)-(1), on obtient :

$$f' - g' = a(f - g) \iff (f - g)' = a(f - g).$$

Ainsi, d'après le **Théorème 4**, on a que :

$$f(x) - g(x) = Ce^{ax}, \text{ où } C \in \mathbb{R}.$$

Par conséquent, on a bien que :

$$f \text{ solution de } (E) \implies f(x) = Ce^{ax} - \frac{b}{a}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

$\boxed{\Leftarrow}$ Montrons que la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = Ce^{ax} - \frac{b}{a}$, où $C \in \mathbb{R}$, est bien solution de (E) .
 f est clairement dérivable sur \mathbb{R} . On a de plus :

$$f'(x) = C \times ae^{ax}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Par conséquent :

$$\forall x \in \mathbb{R}, af(x) + b = a \times (Ce^{ax} - \frac{b}{a}) + b = a \times Ce^{ax} - b + b = f'(x).$$

Donc :

$$f(x) = Ce^{ax} - \frac{b}{a}, \forall x \in \mathbb{R} \implies f \text{ solution de } (E).$$

□

Corollaire : L'équation différentielle $(E) : y' = ay + b$ admet une unique solution vérifiant la condition initiale $y(x_0) = z_0$ (où x_0 et z_0 sont des réels quelconques).

$$\text{exemple : Soit } (E) : \begin{cases} y' = -y + 1 \\ y(0) = 4 \end{cases}.$$

Par le **Théorème 5**, les solutions de $y' = -y + 1$ sont de la forme : $y(x) = Ce^{-x} + 1, \forall x \in \mathbb{R}$.

Ici, on veut $y(0) = 4$, donc :

$$Ce^0 + 1 = 4 \iff C + 1 = 4 \iff C = 3.$$

Donc l'unique solution de (E) est la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 3e^{-x} + 1$.

Est-ce que je vous fait saliver d'impatience en vous disant que ce que vous venez de voir n'est qu'une toute petite partie de la puissance colossale de la fonction exponentielle ???!

TO BE CONTINUED!!!