Exercice 1 : (Correction)

Associer à chaque égalité vectorielle la phrase correspondante et, dans chaque cas, illustrer par une figure :

1. $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$
2. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$
3. $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB}$

a) $ADBC$ est un parallélogramme
b) $ABCD$ est un parallélogramme
c) $ABDC$ est un parallélogramme

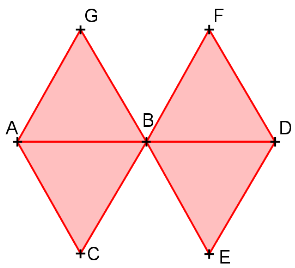
Exercice 2 : (Correction)

On considère le parallélogramme $ABCD$.

1. Donner les égalités vectorielles qui sont vraies ici :
   a) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ b) $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ c) $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$ c) $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AD}$
2. On place E et F tels que $DFEC$ soit un parallélogramme. Montrer alors que $AFEB$ est un parallélogramme.

Exercice 3 : (Correction)

On considère la figure suivante, composée de petits triangles équilatéraux.



1. Sans justification, donner tous les vecteurs égaux à $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{BD}$.
2. Sans justification, donner le représentant de $\overrightarrow{FD}$ d'origine B, et le représentant de $\overrightarrow{FD}$ d'arrivée B.
3. Dans chacun des cas suivants, simplifier au maximum pour obtenir un vecteur unique, en détaillant les étapes :
   a) $\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{FD}$; b) $\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BG}$; c) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{FG}$.

Exercice 4 : (Correction)

Simplifier au maximum les opérations suivantes sur les vecteurs :

a) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BA}$
b) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD}$.
c) $-\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB}$
d) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{AC}$.

Exercice 5 : (Correction)

Démontrer que pour tous points A, B, C, D et E, on a : $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{EB} = \overrightarrow{0}$.

Exercice 6 : (Correction)

On considère un triangle MNO quelconque. Le point P est tel que $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PO}$. Soit Q le symétrique de P par rapport à O.

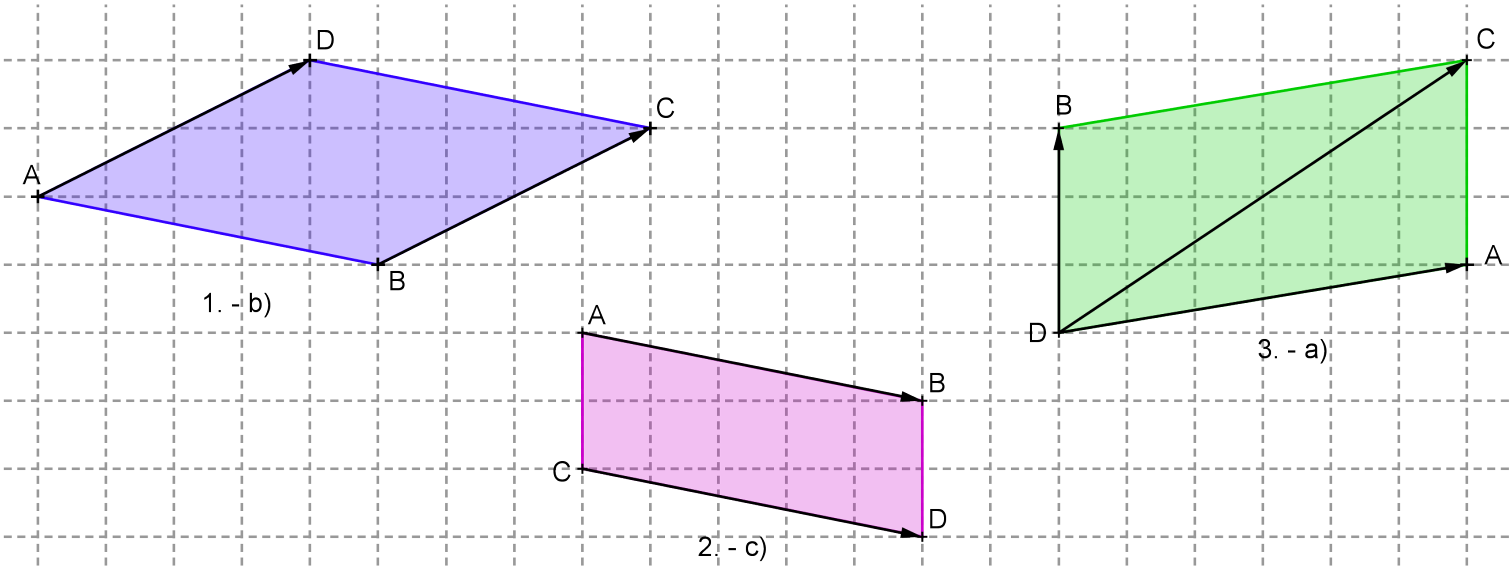
1. Faire une figure.
2. Montrer que le quadrilatère $MNQO$ est un parallélogramme.

Exercice 7 : (Correction)

On considère un cercle de centre O et de diamètre $[AB]$. Placer un point C sur le cercle, distinct de A et B. Placer le point D situé sur le cercle tel que $[CD]$ soit un diamètre.

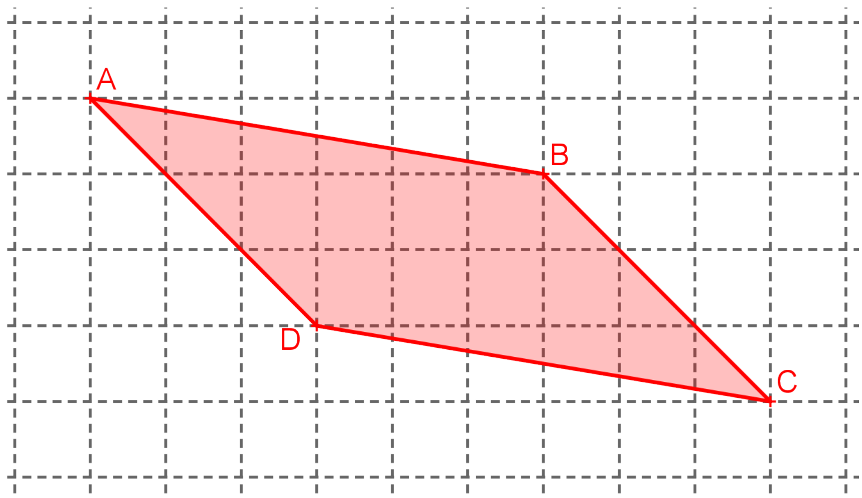
1. Montrer que $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DB}$.
2. Montrer que $ACBD$ est un rectangle.

Correction exercice 1 : (Énoncé)



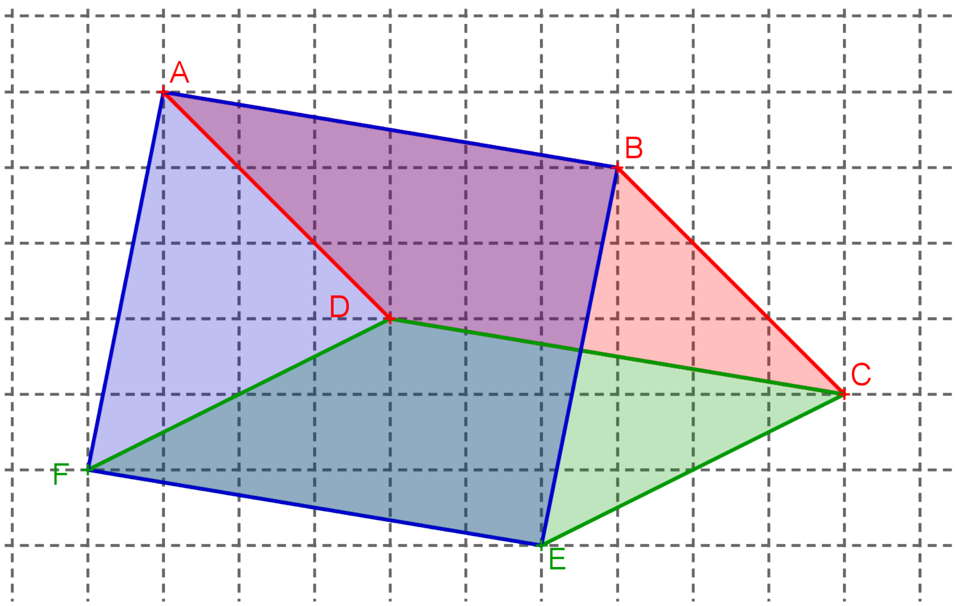
Correction exercice 2 : (Énoncé)

1. Faisons un dessin pour se fixer les idées et pour avoir un support visuel.



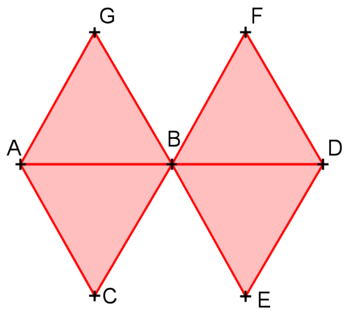
   Ainsi, a) est faux (c'est le piège classique !) ; b) et c) sont vraies ; d) est fausse.

2. Complétons notre dessin :



Idée : on veut montrer que $AFEB$ est un parallélogramme, donc on va utiliser la propriété très puissante disant que $AFEB$ est un parallélogramme si, et seulement si, $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{BE}$ ou $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{FE}$. On l'utilisera d'ailleurs dans les deux sens ! Deux fois parce que l'on a deux parallélogrammes, donc on pourra en déduire deux égalités vectorielles, qui nous donneront une troisième égalité, qui nous permettra d'avoir un troisième parallélogramme...
On sait que $ABCD$ est un parallélogramme, donc $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$.
De plus, $DFEC$ est également un parallélogramme, donc $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{FE}$.
Ainsi, $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{FE}$, donc $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{FE}$ et ainsi $AFEB$ est un parallélogramme.

Correction exercice 3 : (Énoncé)



1. Les vecteurs égaux à $\overrightarrow{AG}$ sont : $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{BF}$ et $\overrightarrow{ED}$. Ceux égaux à $\overrightarrow{BD}$ sont : $\overrightarrow{GF}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CE}$.
Remarque : ce n'est pas parce que les points G et F par exemple ne sont pas reliés que le vecteur $\overrightarrow{GF}$ n'existe pas !
2. Le représentant de $\overrightarrow{FD}$ d'origine B est $\overrightarrow{BE}$, et le représentant de $\overrightarrow{FD}$ d'arrivée B est $\overrightarrow{GB}$.
3. *L'idée est d'utiliser la relation de Chasles (encore lui !). Une méthode consiste à donner le représentant du deuxième vecteur de la somme dont l'origine est le point d'arrivée du premier vecteur. Un peu compliqué tout ça ! Voyez donc.*
a) $\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{FD}=\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{AB}$.

b) $\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BG}=\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{BF}$.

c) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{FG}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AA}=\overrightarrow{0}$.

Correction exercice 4 : (Énoncé)

a)

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BA} &= \cancel{\overrightarrow{AC}}+\overrightarrow{BC}-\cancel{\overrightarrow{AC}}+\overrightarrow{AB} \quad \text{toujours se ramener à des } \textbf{sommes} \text{ de vecteurs}\\
&= \underbrace{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}}_{=\overrightarrow{AC}} \quad \text{remettre dans l'ordre pour utiliser la relation de Chasles}\\
&= \overrightarrow{AC}.
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BD} &= \overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BD} \quad \text{encore une fois, se ramener à des } \textbf{sommes} \text{ de vecteurs}\\
&= \overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD} \quad \text{on utilise deux fois la relation de Chasles}\\
&= \overrightarrow{AD} \quad \text{et une troisième fois !.}
\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
-\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AB} &= \cancel{\overrightarrow{AC}}-\cancel{\overrightarrow{AC}}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB} \quad \text{on laisse } -\overrightarrow{AC} \text{ car on sait qu'il va se faire tuer par le premier } \overrightarrow{AC}\\
&= 2\overrightarrow{AB}.
\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{AC} &= \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{CA}\\
&= \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{CA}\\
&= \overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CA}\\
&= \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}\\
&= \overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}\\
&= \overrightarrow{CB}.
\end{aligned}$$

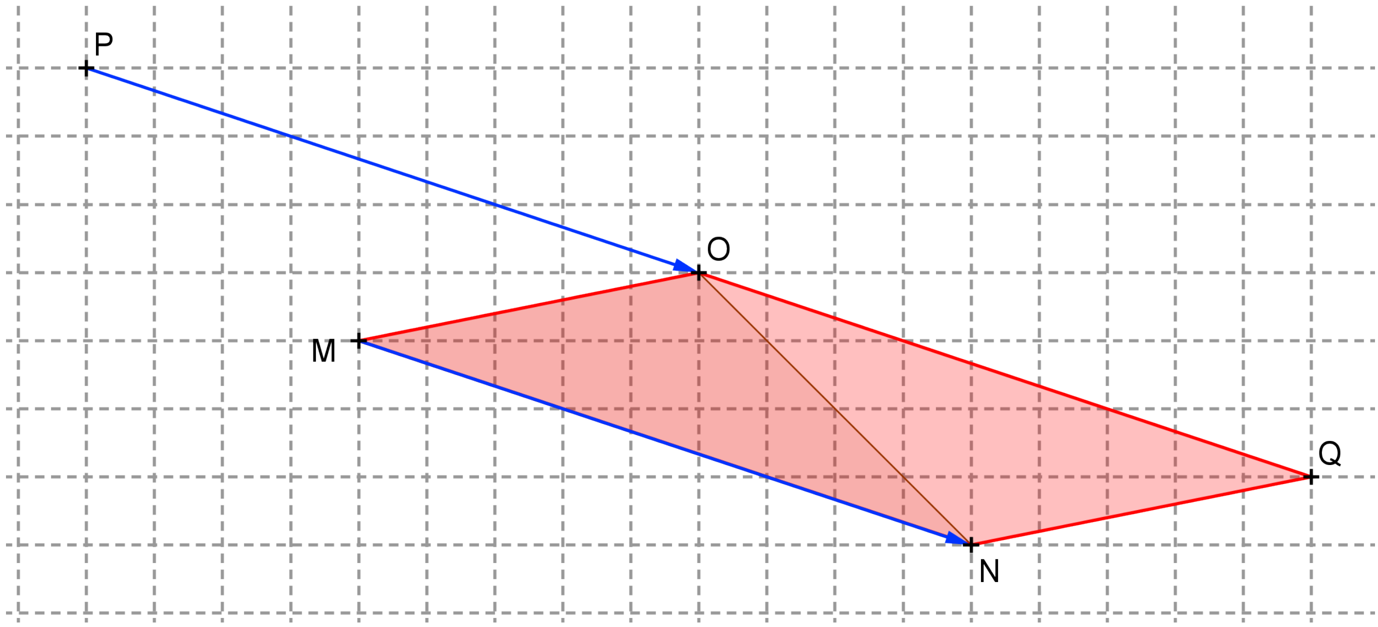
<u>Correction exercice 5</u> : (Énoncé)

On invoque à grands coups de cuillères à pot la relation de Chasles ! On sort les biceps, et en avant :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{EB} &= \overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DA} \quad \text{on met dans l'ordre}\\
&= \overrightarrow{AE}+\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{DA} \quad \text{on a utilisé deux fois notre chère relation de Chasles...}\\
&= \overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DA} \quad \text{... encore une fois...}\\
&= \overrightarrow{AA} \quad \text{... et une dernière fois !}\\
&= \overrightarrow{0}.
\end{aligned}$$

<u>Correction exercice 6</u> : (Énoncé)

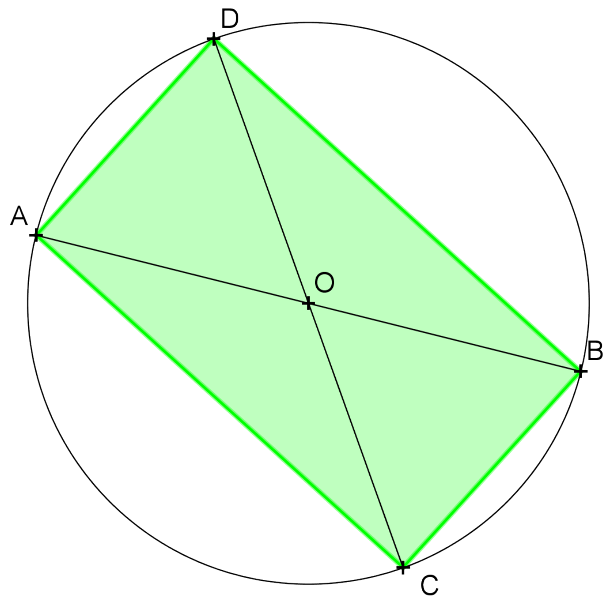
1.



2. *N'oublions pas le chaînon déductif !*
   On sait que $\overrightarrow{PO}=\overrightarrow{MN}$, donc $PONM$ est un parallélogramme. Or, un parallélogramme a ses côtés opposés parallèles et égaux. Ainsi, $(PO)//(MN)$ et $PO=MN$.
   On sait que Q est le symétrique de P par rapport à O, donc O est le milieu de $[PQ]$, et en particulier $OP=OQ$.
   On a donc que (PO) est parallèle à (MN) et que O est le milieu de $[PQ]$, donc (OQ) est parallèle à (MN) et $OQ=MN$.
   Or, un quadrilatère qui a deux côtés opposés parallèles et égaux est un parallélogramme.
   Donc $MNQO$ est un parallélogramme.

Correction exercice 7 : (Énoncé)

Tout d'abord, faisons le dessin.



1. *L'idée ici est de montrer que $ACBD$ est un parallélogramme. Le résultat découlera immédiatement par la propriété du cours.*
   On sait que $[AB]$ et $[CD]$ sont les diagonales du quadrilatère $ACBD$. Ce sont également des diamètres du cercle de centre O. Ainsi, O est le milieu de $[AB]$ et $[CD]$.
   Or, un quadrilatère qui a ses diagonales qui se coupent en leur milieu est un parallélogramme.
   Donc $ACBD$ est un parallélogramme, et donc $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DB}$.
   Remarque : il est inutile de rappeler la formule du cours qui affirme que "$ABCD$ est un parallélogramme si, et seulement si, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$".
2. *Que manque-t-il à un parallélogramme pour être un rectangle ? L'égalité de ses diagonales pardi !*
   On sait que $ACBD$ est un parallélogramme et que ses diagonales sont des diamètres du cercle de centre O. Donc les diagonales ont la même longueur.
   Or, un parallélogramme qui a ses diagonales de même longueur est un rectangle.
   Donc $ACBD$ est un rectangle.
   Remarque : on aurait pu aussi dire que ABC est un triangle rectangle en C, car un triangle inscrit dans un cercle qui a pour côté un diamètre du cercle est un triangle rectangle. On aurait eu ainsi $ACBD$ un parallélogramme avec un angle droit, donc un rectangle.