Le plan est muni du repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Sauf mention contraire, l'unité graphique est 1 cm.

Exercice 1 : (Correction)

Une commune désire aménager un nouvel espace vert. Une société de vente lui propose des lots A comprenant dix rosiers, un magnolia et un camélia pour un montant de 20€ ou des lots B comprenant cinq rosiers, un magnolia et trois camélias pour un montant de 300€.Les besoins sont d'au moins 100 rosiers, 16 magnolias et 30 camélias. On désigne par x le nombre de lots A, et par y le nombre de lots B achetés.
La figure ci-dessous présente une solution graphique de ce problème.
Ce graphique sera complété après avoir été reproduit.

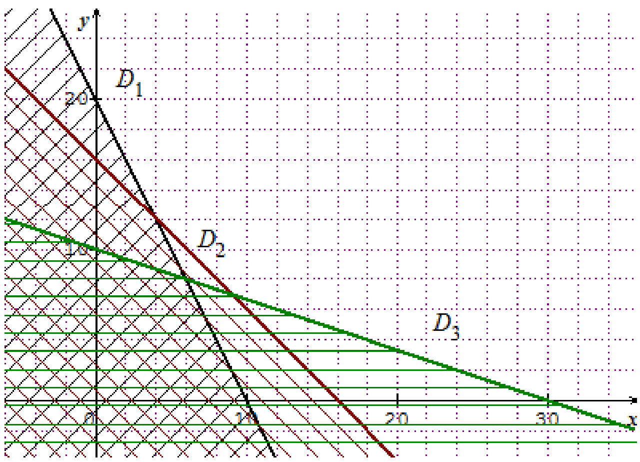
1. (a) Quelle est la contrainte concernant les rosiers ?
   Quelle est la droite frontière associée à cette contrainte ?

   (b) Quelle est la contrainte concernant les magnolias ?
   Quelle est la droite frontière associée à cette contrainte ?

   (c) Quelle est la contrainte concernant les camélias ?
   Quelle est la droite frontière associée à cette contrainte ?

2. Si d désigne la dépense totale en euros pour l'achat des x lots A et y lots B, montrer que $y = -\frac{2}{3}x + \frac{d}{300}$.
   Tracer la droite Δ d'équation $y = -\frac{2}{3}x + \frac{d}{300}$ lorsque $d = 5\,400$.

3. Expliquer comment obtenir à l'aide du graphique le couple $(x; y)$ qui permet de satisfaire les besoins au coût le plus faible possible.
   Quel est ce couple ? Calculer alors la dépense minimale possible.



Exercice 2 : (Correction)

Monsieur François va ouvrir un marché « puces et brocante » sur son terrain. Il y a délimité 240 emplacements. L'installation des exposants commencera à 6 h, le dernier exposant devra avoir fini de s'installer à 8 h. Il prévoit que chaque exposant arrivant :

- avec une voiture, paiera 10 euros de redevance et disposera de quatre emplacements pour installer son stand,
- avec un fourgon, paiera 16 euros de redevance et disposera de six emplacements.

Il faut en moyenne 1 min à une voiture pour se garer et 4 min à un fourgon.
Pour des raisons de sécurité, chaque exposant ne peut commencer à se garer que lorsque le précédent a fini de se garer.

Monsieur François souhaite déterminer le nombre de voitures et le nombre de fourgons nécessaires pour que sa recette soit maximale.

Partie A : On note x le nombre de voitures et y le nombre de fourgons.

1. Écrire un système d'inéquations correspondant aux contraintes du problème.
2. Montrer que ce système est équivalent à celui ci-dessous :

$$(S)\left\{\begin{array}{lcl} x & \geqslant & 0 \\ y & \geqslant & 0 \\ 2x+3y & \leqslant & 120 \\ x+4y & \leqslant & 120 \end{array}\right.$$

3. Dans un repère orthonormé, représenter les deux droites (d_1) et (d_2) d'équations respectives $2x+3y=120$ et $x+4y=120$. On prendra 1 cm pour 5 unités.
4. Déterminer graphiquement l'ensemble des points M du plan dont les coordonnées vérifient le système (S). On hachurera la partie du plan qui ne convient pas.
5. Préciser si Monsieur François peut accueillir :
   (a) 50 voitures et 20 fourgons ?
   (b) 30 voitures et 15 fourgons ?
   (c) 24 voitures et 24 fourgons ?

Partie B : On note R la recette de la journée.

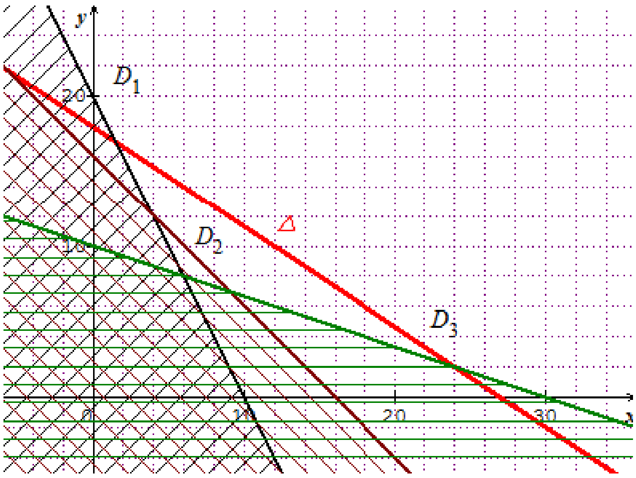
1. Exprimer R en fonction de x et y.
2. Déterminer une équation cartésienne puis l'équation réduite de la droite (d) correspond à une recette de 160 euros.
3. Représenter la droite (d) dans le repère précédent.
4. (a) Tracer la droite (d') correspondant à la recette maximale, en expliquant la démarche utilisée.
   (b) Trouver le couple d'entiers $(x\ ;\ y)$ qui permet d'obtenir la recette maximale.
   (c) Calculer alors cette recette maximale et répondre au problème posé.

Correction exercice 1 : (Énoncé)

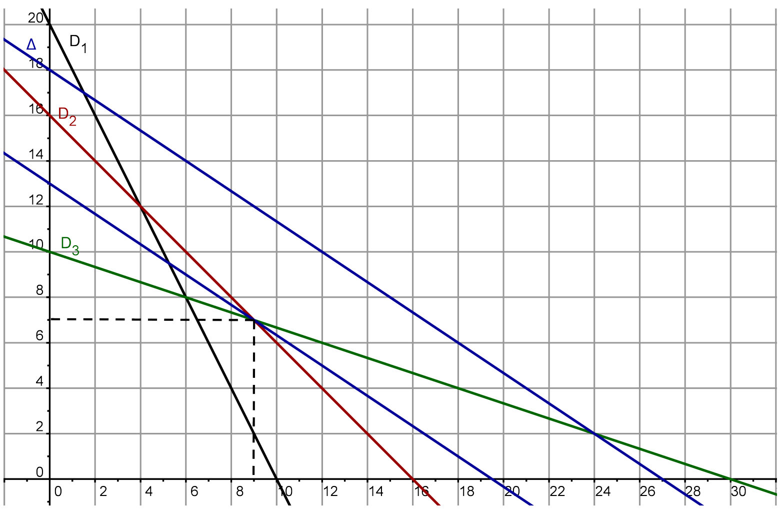
1. (a) La contrainte concernant les rosiers est la suivante : $10x+5y \geq 100$, ce qui revient, en divisant par 5, à $\underline{2x+y \geq 20}$.
La droite frontière associée est la droite d'équation $2x+y=20$, c'est-à-dire $y=-2x+20$. C'est donc la droite $\mathcal{D}_1$.
   (b) La contrainte concernant les magnolias est la suivante : $\underline{x+y \geq 16}$.
La droite frontière associée est la droite d'équation $x+y=16$, c'est-à-dire $y=-x+16$. C'est donc la droite $\mathcal{D}_2$.
   (c) La contrainte concernant les camélias est la suivante : $\underline{x+3y \geq 30}$.
La droite frontière associée est la droite d'équation $x+3y=30$, c'est-à-dire $y=-\dfrac{1}{3}x+10$. C'est donc la droite $\mathcal{D}_3$.
2. En notant d la dépense totale en euros, on a $200x+300y=d$. Ainsi,

$$\begin{aligned} 200x+300y &= d \\ 300y &= -200x+d \\ y &= -\frac{200}{300}x+\frac{d}{300} \\ y &= -\frac{2}{3}x+\frac{d}{300}. \end{aligned}$$

Pour tracer la droite, on ne répète plus la méthode : on prend deux valeurs de x et on trouve deux valeurs de y. On obtient ainsi les coordonnées de deux points, on les place et on trace la droite les reliant.



3. Pour trouver le couple $(x;y)$ permettant de satisfaire les besoins au coût le plus faible possible, il suffit de tracer la droite d'équation $y=-\dfrac{2}{3}x+\dfrac{d}{300}$ qui intersecte au plus bas en ordonnée la zone non hachurée. Autrement dit, on trace la droite **parallèle** (car toutes les droites ont le même coefficient directeur) à Δ, qui satisfait la condition précédente.
Comme avec le premier logiciel les valeurs ne sont pas très lisibles, je change de logiciel, donc ne soyez pas choqués par la différence de dessin !



Ainsi, le couple permettant de satisfaire les besoins au coût le plus faible est le couple $(9;7)$.
Comme $d=200\times 9+300\times 7=1800+2100=3900$, le coût est alors de 3 900€.

<u>Correction exercice 2</u> :   (Énoncé)

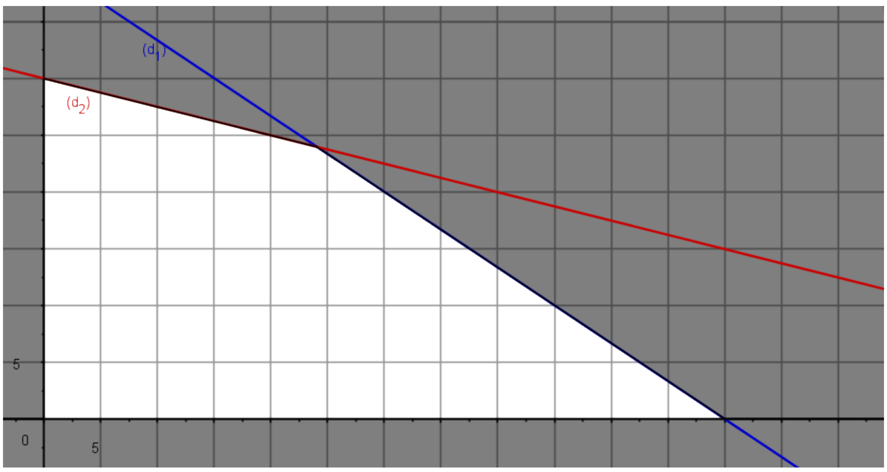
Partie A :

1. x et y sont les nombres de voitures et de fourgons, donc $x \geq 0$ et $y \geq 0$.
De plus, chaque exposant arrivant avec une voiture dispose de quatre emplacements, et ceux arrivant en fourgon en disposeront de six. Il y en a 240, donc $4x + 6y \leq 240$.
En deux heures, soit 120 minutes, les exposants s'installent. Une voiture met une minute, et un fourgon en met quatre, donc $x + 4y \leq 120$.
Donc le système des contraintes est :
$$\left\{\begin{array}{lcl} x & \geqslant & 0 \\ y & \geqslant & 0 \\ 4x+6y & \leqslant & 240 \\ x+4y & \leqslant & 120 \end{array}\right. .$$

2. Les systèmes ne diffèrent que de la troisième inéquation. On a $4x + 6y \leq 240$ qui est équivalente à $2x + 3y \leq 120$, en divisant l'inégalité par 2.
Donc le système des contraintes est bien équivalent au système (S).

3. *On ne rappelle pas comment tracer les droites... Bon ok... On place deux points de la droite en prenant deux valeurs de x et en trouvant les deux valeurs de y qui correspondent. C'est bon maintenant ?*

4. Pour les deux premières inéquations, c'est facile.
Pour $x + 4y \leq 120$, on prend les coordonnées $(0; 0)$, que l'on remplace dans $x + 4y$, et on regarde si le résultat est plus petit ou plus grand que 120. Ainsi, $0 + 4 \times 0 \leq 120$, donc l'origine du repère est à garder. On hachure donc la partie au-dessus de la droite (d_2).
De même, $2 \times 0 + 3 \times 0 = 0 \leq 120$, donc la partie au-dessus de la droite (d_1) est à hachurer.
Voici ce que cela nous donne (en coloriant au lieu de hachurer) :



5. (a) Le point de coordonnées $(50; 20)$ est dans la partie coloriée, donc Monsieur François ne peut pas accueillir 50 voitures et 20 fourgons.

   (b) Le point de coordonnées $(30; 15)$ n'est pas dans la partie coloriée, donc Monsieur François peut accueillir 30 voitures et 15 fourgons.

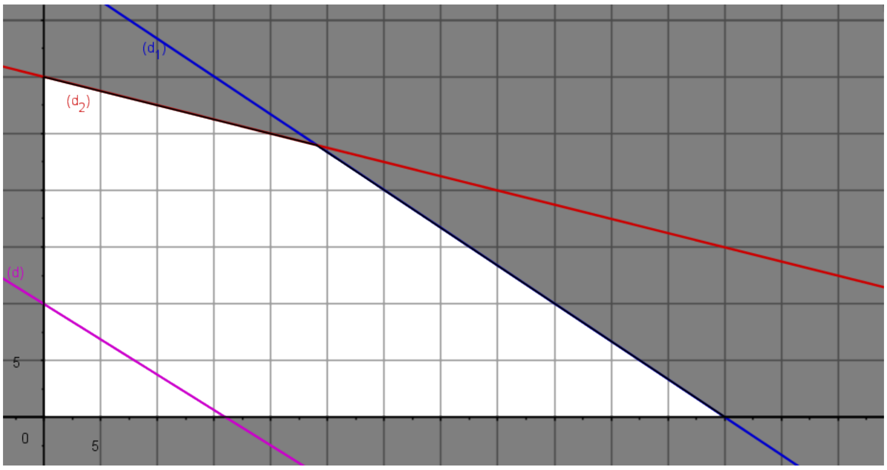
(c) Le point de coordonnées $(24; 24)$ est à la frontière de la partie coloriée, donc Monsieur François peut accueillir 24 voitures et 24 fourgons.

Partie B :

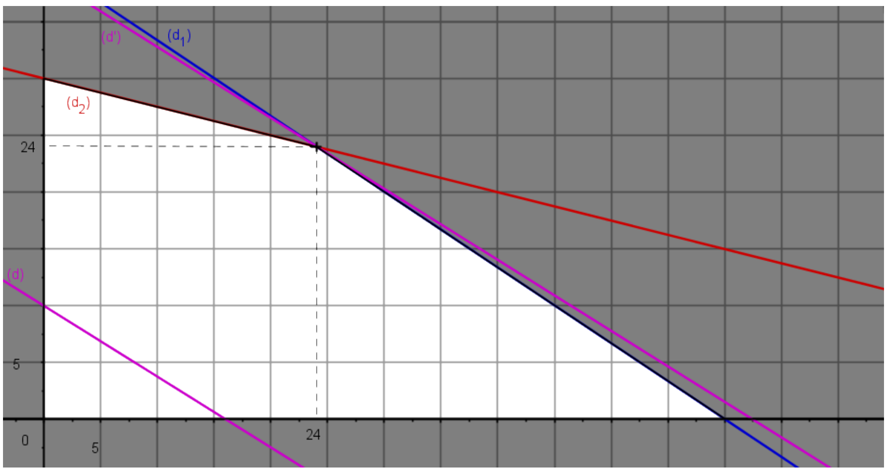
1. Une voiture paie 10 euros et un fourgon paie 16 euros, donc $\boxed{R = 10x + 16y}$.
2. On pose $R = 160$, donc $\boxed{10x + 16y = 160}$.
   Pour l'équation réduite,

$$\begin{aligned} 10x + 16y &= 160 \\ 16y &= -10x + 160 \\ y &= -\frac{10}{16}x + \frac{160}{16} \\ y &= -\frac{5}{8}x + 10. \end{aligned}$$

   Donc l'équation réduite de (d) est $\boxed{y = -\frac{5}{8}x + 10}$.
3. *Je ne vais pas me répéter concernant la construction, car on va croire qu'Alzheimer me guette à force de dire plusieurs fois la même chose...*



4. (a) On trace la droite parallèle à la droite (d), qui coupe l'axe des ordonnées le plus haut possible, et qui intersecte la partie non coloriée.
   Pour tracer la droite, on place le point d'intersection des deux droites frontières, et à l'aide du coefficient directeur de la droite (d) (rappelons-le qui est $-\frac{5}{8}$) permet de placer un autre point en partant du premier trouvé.



   (b) La recette maximale est donnée avec $\boxed{x = 24 \text{ et } y = 24}$.

   (c) La recette maximale est alors de $\boxed{624 \text{ euros}}$, car $10 \times 24 + 16 \times 24 = 624$.