1 Arbres, tableaux, diagrammes de Venn et probabilité d'événements

Exercice 1 : (Correction)
Lors d'une étude sur les voyages des lycéens en Europe, 363 élèves de seconde ont été interrogés sur leurs séjours en Espagne, Angleterre et Italie.

- ⋆ 180 élèves ont séjourné en Espagne, 192 en Angleterre et 199 en Italie.
- ⋆ 103 élèves ont séjourné au moins en Espagne et en Angleterre, 105 élèves ont séjourné au moins en Italie et en Angleterre, 123 élèves ont séjourné au moins en Espagne et en Italie.
- ⋆ De plus 73 élèves déclarent avoir séjourné dans les trois pays.

1. Construire un diagramme de Venn pour décrire la situation.
2. En vous aidant du diagramme, déterminer le nombre d'élèves :
   (a) qui ont séjourné uniquement en Espagne.
   (b) qui ont séjourné uniquement en Italie et en Angleterre.
   (c) qui n'ont séjourné dans aucun de ces trois pays.

Exercice 2 : (Correction)
Un dé, en forme de dodécaèdre régulier, a ses faces numérotées de 1 à 12. On le suppose bien équilibré.
On lance le dé et on considère les événements :

A : " On obtient un nombre impair " ; B : " On obtient un multiple de 3 " ; C : " On obtient un diviseur de 12 ".

1. Déterminer l'univers Ω associé à cette expérience aléatoire.
2. Donner l'écriture ensembliste et calculer la probabilité de chaque événement.

Exercice 3 : (Correction)
Pour organiser le passage à l'oral de leur épreuve de langue, les élèves tirent au hasard trois cartons, un dans chacune des trois urnes.
La première urne contient les lettres " A ", " B " et " C ". La seconde urne contient les nombres " 25 " et " 27 ". La dernière urne contient les mots " Matins " et " Après-midi ".
Obtenir le tirage $(A; 25; Matin)$ signifie que l'élève passera son oral le 25 juin au matin avec le sujet A.

1. Décrire la situation à l'aide d'un arbre.
2. Combien y a-t-il de tirages possibles ?
3. Après le tirage on choisit un élève au hasard.
   (a) Quelle est la probabilité que l'élève choisi passe le matin ?
   (b) Quelle est la probabilité que l'élève choisi passe le 27 juin ?
   (c) Quelle est la probabilité que l'élève choisi soit interrogé sur le sujet C ?
   (d) Quelle est la probabilité que l'élève choisi passe l'après-midi avec le sujet B ?

Exercice 4 : (Correction)
On choisir au hasard un foyer français ayant deux enfants et on s'intéresse au nombre de filles dans ce foyer. On suppose l'équiprobabilité des sexes à chaque naissance et on exclut les naissances multiples.

1. Déterminer l'univers Ω de cette expérience aléatoire.
2. Déterminer le modèle ou la loi de probabilité de cette expérience aléatoire. On pourra s'aider d'un tableau à double entrées.

Exercice 5 : (Correction)
Une urne contient deux boules bleues B_1 et B_2, et trois boules jaunes : J_1, J_2 et J_3. On prend au hasard une boule, on note de quelle boule il s'agit, on la remet dans l'urne et on recommence une deuxième fois. On parle de **tirages avec remise**.

1. Dresser un arbre ou un tableau à double entrées, selon votre convenance, illustrant toutes les issues possibles.
2. Est-on dans une situation d'équiprobabilité ? Si oui, donner la probabilité commune des événements élémentaires composés de chacune des issues ; si non, dresser un tableau décrivant la loi de probabilité.
3. Calculer la probabilité de l'événement A : " Les deux boules sont de couleurs différentes ".

Exercice 6 : (Correction)
On lance deux dés équilibrés tétraédriques (quatre faces) dont les faces sont numérotées de 1 à 4, et on calcule ensuite la différence entre le plus grand résultat obtenu et le plus petit.

1. Dresser un tableau à double entrées illustrant tous les résultats possibles de cette expérience aléatoire.
2. Déterminer alors l'univers Ω de cette expérience aléatoire.
3. Établir la loi de probabilité de cette expérience aléatoire (on pourra présenter cela sous forme d'un tableau).
4. Déterminer la probabilité de l'événement A : " Obtenir au moins 2 ".

Exercice 7 : (Correction)
On tire au hasard une boule dans une urne contenant 20 boules indiscernables au toucher.

1. Parmi les 20 boules, il y a : 6 rouges, 10 noires et 4 vertes. Calculer la probabilité de l'événement R : « la boule est rouge » et de l'événement N : « la boule est noire ».
2. Parmi les 20 boules, r sont rouges, n sont noires et v sont vertes. Retrouver la composition de l'urne sachant que $P(R) = 0,25$ et $P(N) = 0,15$.

2 Probabilité de l'événement contraire, de la réunion et de l'intersection d'événements

Exercice 8 : (Correction)
On considère un univers Ω et deux événements A et B dans cet univers. Dans chaque cas, calculer la probabilité manquante :

1. $P(A) = 0,3$; $P(B) = 0,7$; $P(A \cap B) = 0,1$. $P(A \cup B) = ?$
2. $P(A) = 0,6$; $P(B) = 0,1$; $P(A \cup B) = 0,65$. $P(A \cap B) = ?$
3. $P(A \cup B) = 0,8$; $P(A \cap B) = 0,2$; $P(A) = 0,5$. $P(B) = ?$
4. $P(\overline{A}) = 0,8$; $P(B) = 0,15$; $P(A \cup B) = 0,3$. $P(A \cap B) = ?$
5. $P(B) = 0,6$; $P(A \cup B) = 0,9$; A et B sont incompatibles. $P(A) = ?$

Exercice 9 : (Correction)
Didier Deschamps et son adjoint Guy Stéphan s'apprêtent à donner leur avis sur la sélection de Karim Benzema pour le prochain match de l'Equipe de France de football.
On note D et S, respectivement, les événements : " Deschamps y est favorable " et " Stéphan y est favorable ".

1. Expliciter clairement, en français, les événements $\overline{D}$, $D \cap S$, $D \cup S$, $\overline{D} \cap S$ et $\overline{D} \cap \overline{S}$.
2. Que peut-on dire des événements $D \cup S$ et $\overline{D} \cap \overline{S}$?
3. On suppose que la probabilité que Deschamps et Stéphan soit favorables tous les deux à la sélection de Benzema est de $0,6$, que la probabilité que Deschamps soit favorable à sa sélection est de $0,8$, et que celle que Stéphan y soit favorable est de $0,7$. Calculer $P(D \cup S)$ et $P(\overline{D} \cap \overline{S})$.

Exercice 10 : (Correction)
On tire une carte parmi les 32 cartes d'un jeu. On note A l'événement " la carte est un roi " et B l'événement " la carte est un trèfle ".

1. Déterminer la probabilité de A, de B, de $A \cap B$ puis de $A \cup B$. On donnera les résultats sous forme de fractions, puis on pourra arrondir à 10^{-2} près.
2. Déterminer la probabilité de ne pas obtenir de roi.
3. Déterminer la probabilité que la carte soit un roi mais pas un trèfle.

Exercice 11 : (Correction)
Un artisan produit du miel et de la confiture, de manière industrielle et aussi biologique.
Sa production mensuelle est de 900 pots, comprenant notamment :
- 603 pots de miel, dont 333 sont de fabrication industrielle ;
- 63 pots de confiture de fabrication biologique.

1. Recopier et compléter le tableau ci-dessous.

	Pots de miel	Pots de confiture	Total
Production industrielle			
Production biologique			
Total			900

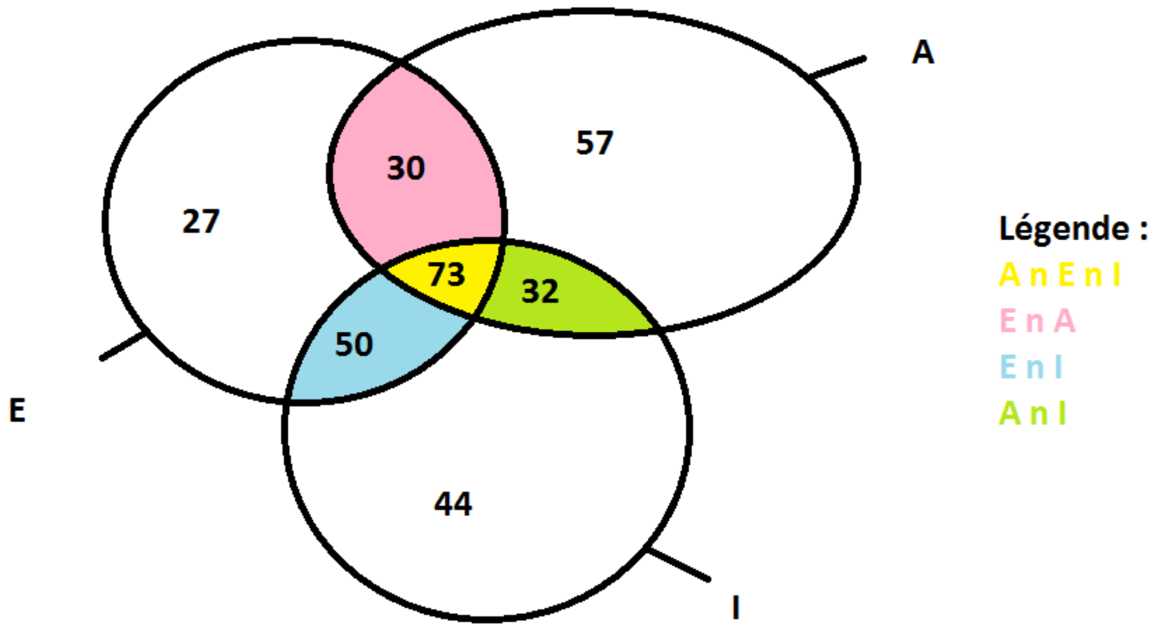
2. On choisit un pot au hasard dans la production du mois et on appelle C l'événement : " c'est un pot de confiture " et B l'événement : " c'est un pot de fabrication biologique ".
   (a) Calculer les probabilités des événements B et C.
   (b) Décrire par une phrase les événements suivants, puis calculer leur probabilité : $\overline{B}$, $B \cap C$, $B \cup C$.
   (c) On choisit au hasard un pot parmi les pots de confiture. Quelle est la probabilité qu'il soit de fabrication biologique ?
   (d) On choisit au hasard un pot parmi les pots de fabrication biologique. Quelle est la probabilité qu'il s'agisse d'un pot de confiture ?

Correction des exercices

1 Arbres, tableaux, diagrammes de Venn et probabilité d'événements

Correction exercice 1 : (Énoncé)

1. Voilà ce que donne notre diagramme de Venn, en notant E l'événement " l'élève est parti en Espagne " ; A l'événement " l'élève est parti en Angleterre " et I l'événement " l'élève est parti en Italie " :



2. Je crois que le diagramme parle de lui-même...
   (a) Il y a $\boxed{\text{27 élèves qui ont séjourné uniquement en Espagne.}}$
   (b) Il y a $\boxed{\text{32 élèves qui ont séjourné uniquement en Italie et en Angleterre.}}$
   (c) C'est une question difficile... Le diagramme va être extrêmement précieux (" *Mon précieux...* ") et utile. On va compter les élèves qui sont partis, et l'on retranchera ce résultat à 363, nombre d'élèves. Il faut faire attention à ne pas compter deux fois le même élève :

$$27 + 30 + 73 + 50 + 44 + 32 + 57 = 313 \qquad \text{et} \qquad 363 - 313 = 50.$$

   Donc il y a $\boxed{\text{50 élèves qui ne sont pas partis.}}$

Correction exercice 2 : (Énoncé)

1. On a $\boxed{\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12\}.}$
2. Le dé étant bien équilibré, nous sommes dans une situation d'équiprobabilité. Ainsi, pour déterminer la probabilité de chaque événement, il suffit de compter le nombre d'issues favorables à chaque événement, et de diviser le résultat par le nombre total d'issues, soit 12.

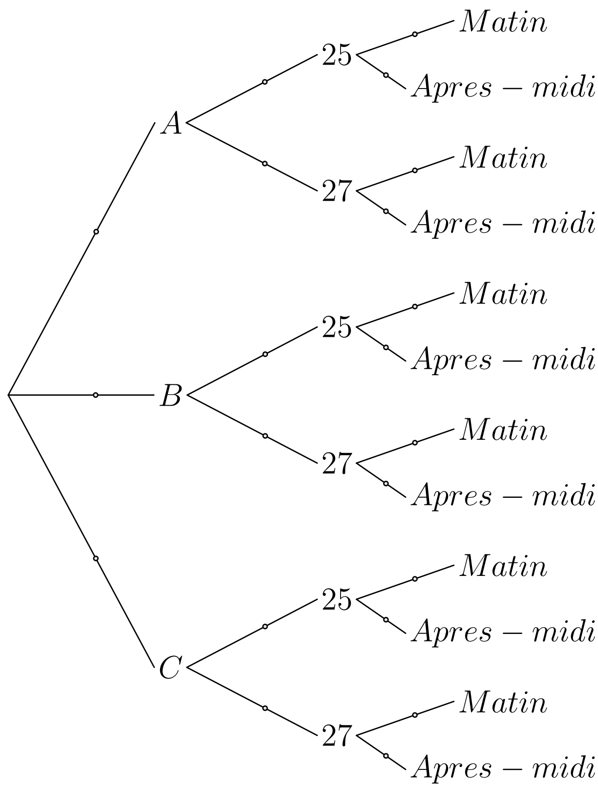
$\boxed{A = \{1; 3; 5; 7; 9; 11\} \text{ donc } P(A) = \dfrac{6}{12} = \dfrac{1}{2}.}$

$\boxed{B = \{3; 6; 9; 12\} \text{ donc } P(B) = \dfrac{4}{12} = \dfrac{1}{3}.}$

$\boxed{C = \{1; 2; 3; 4; 6; 12\} \text{ donc } P(C) = \dfrac{6}{12} = \dfrac{1}{2}.}$

Correction exercice 3 : (Énoncé)

1. On distingue d'abord les sujets, puis les jours et enfin le moment de la journée. On peut procéder dans un sens différent, je me suis seulement laissé porter par leur exemple de (A ;25 ;Matin).



2. Il suffit de compter toutes les grandes branches (ou les feuilles à l'arrivée). On obtient ainsi $\boxed{\text{12 tirages possibles.}}$
3. (a) Comme tous les tirages sont possibles (situation d'équiprobabilité), il suffit de compter le nombre de branches contenant la matin.
   Ainsi, $\boxed{\text{la probabilité que l'élève choisi passe le matin est } \frac{6}{12} \text{ soit } 0,5.}$
   (b) De même, en comptant le nombre de grandes branches contenant le 27, on obtient 6.
   Donc $\boxed{\text{la probabilité que l'élève choisi passe le 27 juin est } \frac{6}{12} \text{ soit } 0,5.}$
   (c) On peut raisonner comme précédemment, mais pour aller plus vite, on a une chance sur trois que l'élève passe avec le sujet C car il y a trois sujets. Donc $\boxed{\text{la probabilité que l'élève choisi passe avec le sujet } C \text{ est } \frac{1}{3}.}$
   (d) Il n'y a que deux grandes branches qui contiennent le sujet B et l'après-midi.
   Donc $\boxed{\text{la probabilité que l'élève choisi passe avec le sujet } B \text{ l'après-midi est } \frac{2}{12} \text{ soit } \frac{1}{6}.}$

Correction exercice 4 : (Énoncé)

1. Dans une famille à deux enfants, nous avons soit aucune fille, soit une fille, soit deux filles. Donc $\boxed{\Omega = \{0;1;2\}.}$
2. Dressons un tableau à double entrées pour mieux visualiser ce qu'il se passe :

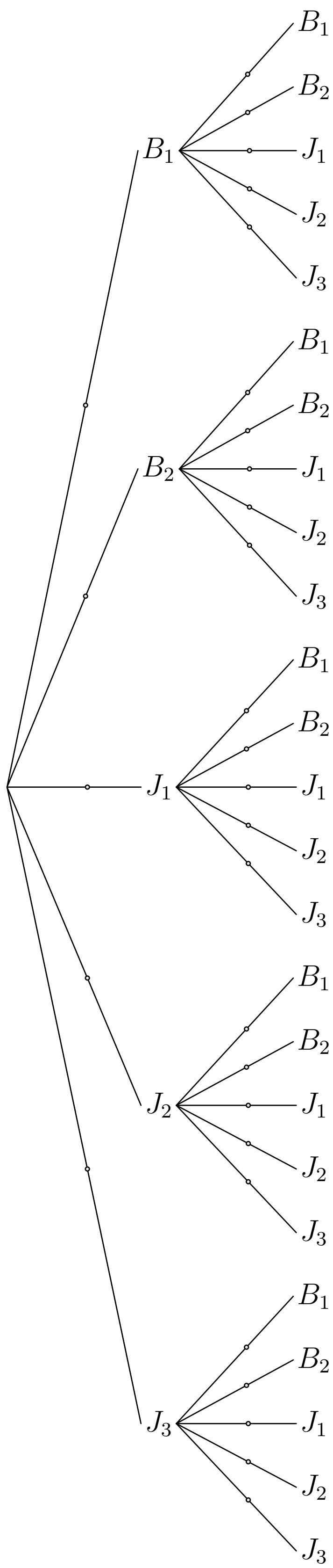
2eme enfant / 1er enfant	F	G
F	FF	FG
G	GF	GG

Ainsi, on obtient la loi de probabilité suivante :

Issue	0	1	2
Probabilité	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

Correction exercice 5 : (Énoncé)

1. Voici les œuvres d'art...



1ere boule \ 2eme boule	B_1	B_2	J_1	J_2	J_3
B_1	$(B_1;B_1)$	$(B_1;B_2)$	$(B_1;J_1)$	$(B_1;J_2)$	$(B_1;J_3)$
B_2	$(B_2;B_1)$	$(B_2;B_2)$	$(B_2;J_1)$	$(B_2;J_2)$	$(B_2;J_3)$
J_1	$(J_1;B_1)$	$(J_1;B_2)$	$(J_1;J_1)$	$(J_1;J_2)$	$(J_1;J_3)$
J_2	$(J_2;B_1)$	$(J_2;B_2)$	$(J_2;J_1)$	$(J_2;J_2)$	$(J_2;J_3)$
J_3	$(J_3;B_1)$	$(J_3;B_2)$	$(J_3;J_1)$	$(J_3;J_2)$	$(J_3;J_3)$

2. On est dans une situation d'équiprobabilité car on prend une boule au hasard.
   Il y a 25 tirages possibles, donc $\boxed{\text{la probabilité de chaque événement élémentaire est } \frac{1}{25}.}$
3. L'événement A est composé de 12 issues (je vous laisse les trouver, à l'aide de l'arbre ou du tableau).
   Ainsi, $\boxed{P(A) = \frac{12}{25}.}$

<u>Correction exercice 6</u> : (Énoncé)

1. Il faut bien faire attention à soustraire le plus petit nombre au plus grand, et non l'opposé ! Les résultats sont alors tous positifs.

1er dé \ 2eme dé	1	2	3	4
1	0	1	2	3
2	1	0	1	2
3	2	1	0	1
4	3	2	1	0

2. On a alors $\boxed{\Omega = \{0;1;2;3\}.}$
3. Voici la loi de probabilité :

Issue	0	1	2	3
Probabilité	$\frac{4}{16} = \frac{1}{4}$	$\frac{6}{16} = \frac{3}{8}$	$\frac{4}{16} = \frac{1}{4}$	$\frac{2}{16} = \frac{1}{8}$

4. On a $A = \{2;3\}$, donc $P(A) = \frac{4}{16} + \frac{2}{16} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$. Ainsi, $\boxed{\text{la probabilité de l'événement A est } \frac{3}{8}.}$

<u>Correction exercice 7</u> : (Énoncé)

Dans tout l'exercice nous sommes dans une situation d'équiprobabilité car les boules sont indiscernables au toucher.

1. Comme nous sommes dans une situation d'équiprobabilité, nous avons $P(R) = \frac{6}{20} = \frac{3}{10} = 0,3$. Donc $\boxed{P(R) = 0,3.}$
   De même $P(N) = \frac{10}{20} = \frac{1}{2} = 0,5$. Donc $\boxed{P(N) = 0,5.}$
2. On a $P(R) = 0,25$ et il y a 20 boules. On a $20 \times 0,25 = 5$ donc il y a $\boxed{\text{5 boules rouges dans l'urne.}}$
   On a $P(N) = 0,15$ et il y a toujours 20 boules (à moins qu'une soit partie entre temps...). On a $20 \times 0,15 = 3$ donc il y a $\boxed{\text{3 boules noires dans l'urne.}}$
   Ainsi, comme $20 - (5+3) = 20 - 8 = 12$, il y a $\boxed{\text{12 boules vertes dans l'urne.}}$

2 Probabilité de l'événement contraire, de la réunion et de l'intersection d'événements

Correction exercice 8 : (Énoncé)

La formule importante pour cet exercice est la suivante : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

1. Ici,

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= 0,3 + 0,7 - 0,1 \\ &= 0,9. \end{aligned}$$

Donc $\boxed{P(A \cup B) = 0,9.}$

2. En utilisant la même formule, mais en cherchant cette fois $P(A \cap B)$, on a :

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ P(A \cap B) &= P(A) + P(B) - P(A \cup B) \\ &= 0,6 + 0,1 - 0,65 \\ &= 0,05. \end{aligned}$$

Donc $\boxed{P(A \cap B) = 0,05.}$

3.

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A \cup B) - P(A) + P(A \cap B) \\ &= 0,8 - 0,5 + 0,2 \\ &= 0,5. \end{aligned}$$

Donc $\boxed{P(B) = 0,5.}$

4. Tout d'abord, il nous faut trouver $P(A)$. On sait que $P(A) = 1 - P(\overline{A})$. Donc $P(A) = 0,2$. Ainsi,

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A) + P(B) - P(A \cup B) \\ &= 0,2 + 0,15 - 0,3 \\ &= 0,05. \end{aligned}$$

Donc $\boxed{P(A \cap B) = 0,05.}$

5. Comme A et B sont incompatibles, on a $A \cap B = \emptyset$, donc $P(A \cap B) = 0$. Ainsi,

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \cup B) - P(B) + P(A \cap B) \\ &= 0,9 - 0,6 + 0 \\ &= 0,3. \end{aligned}$$

Donc $\boxed{P(A) = 0,3.}$

Correction exercice 9 : (Énoncé)

1. $\overline{D}$: " Deschamps n'est pas favorable à la sélection de Benzema " ; $D \cap S$: " Deschamps et Stéphan sont favorables à sa sélection " ; $D \cup S$: " Deschamps ou Stéphan, ou les deux, sont favorables à sa sélection " ; $\overline{D} \cap S$: " Deschamps n'est pas favorable à sa sélection alors que Stéphan l'est " ; $\overline{D} \cap \overline{S}$: " Ni Deschamps, ni Stéphan n'est favorable à sa sélection ".
2. En relisant la traduction francaise des événements $D \cup S$ et $\overline{D} \cap \overline{S}$, on s'aperçoit que ces deux événements sont $\boxed{\text{contraires l'un de l'autre}}$. En effet, soit a moins l'un des deux est favorable à la sélection de Benzema ($D \cup S$), soit aucun des deux ne l'est ($\overline{D} \cap \overline{S}$).
3. Traduisons l'énoncé en maths (*et vous allez voir que c'est moins long à écrire... les matheux sont fainéants !*) :

$$P(D \cap S) = 0,6 \quad ; \quad P(D) = 0,8 \quad \text{et} \quad P(S) = 0,7.$$

Une fois avoir traduit l'énoncé après un effort plus qu'intense, nous allons pouvoir raisonner.
Comme $P(D \cup S) = P(D) + P(S) - P(D \cap S)$, nous avons

$$P(D \cup S) = 0,8 + 0,7 - 0,6 = 0,9.$$

Donc $\boxed{P(D \cup S) = 0,9.}$

De plus, comme d'après la question 2 les événements $D \cup S$ et $\overline{D} \cap \overline{S}$ sont contraires l'un de l'autre, on peut utiliser la formule permettant de calculer la probabilité d'un événement en fonction de celle de son événement contraire. Nous avons alors

$$P(\overline{D} \cap \overline{S}) = 1 - P(D \cup S) = 1 - 0,9 = 0,1.$$

Donc $\boxed{P(\overline{D} \cap \overline{S}) = 0,1.}$

Correction exercice 10 : (Énoncé)

1. Précisons que nous sommes comme bien souvent dans une situation d'équiprobabilité. On a donc $\boxed{P(A) = \frac{4}{32}}$ car il y a 4 rois. Ainsi, $\boxed{P(A) \simeq 0,13.}$

   De même, comme il y a quatre couleurs et qu'elles ont toutes le même nombre de cartes, nous avons $\boxed{P(B) = \frac{1}{4}}$ c'est-à-dire $\boxed{P(B) = 0,25.}$

   $A \cap B$ est l'événement " Obtenir le roi de trèfle ", donc $A \cap B$ n'est réalisé que par une seule issue. Ainsi, $\boxed{P(A \cap B) = \frac{1}{32} \simeq 0,03.}$

   Il y a deux manières de voir les choses. La première est de dire que l'événement $A \cup B$ est réalisé par 11 issues : les 8 cartes trèfle et les trois rois qui ne sont pas trèfle (le roi de trèfle étant compté dans les 8 cartes trèfle). Ainsi, $\boxed{P(A \cup B) = \frac{11}{32} \simeq 0,34.}$

   La seconde manière est d'utiliser la formule de la probabilité de la réunion de deux événements :

   $$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= \frac{4}{32} + \frac{8}{32} - \frac{1}{32} \\ P(A \cup B) &= \frac{11}{32}. \end{aligned}$$

   Heureusement que l'on tombe sur le même résultat !

2. On demande de calculer $P(\overline{A})$. $\overline{A}$ est l'événement " ne pas obtenir de roi ", donc comme il n'y a que 4 rois, il y a 28 cartes qui ne sont pas un roi. On a alors $\boxed{P(\overline{A}) = \frac{28}{32} \simeq 0,88}$.

   Remarque : autre méthode. On sait que $P(A) = \frac{4}{32}$, *donc*

   $$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{4}{32} = \frac{32}{32} - \frac{4}{32} = \frac{28}{32} = \frac{7}{8} \simeq 0,88.$$

3. On nous demande de calculer la probabilité de $A \cap \overline{B}$. Il y a trois cartes qui conviennent : le roi de pique, le roi de carreau et le meilleur pour la fin le roi de cœur. Ainsi, $\boxed{P(A \cap \overline{B}) = \frac{3}{32} \simeq 0,09.}$

Correction exercice 11 : (Énoncé)

1.

	Pots de miel	Pots de confiture	Total
Production industrielle	333	234	567
Production biologique	270	63	333
Total	603	297	900

2. (a) Comme on choisit au hasard le pot, on est dans une situation d'équiprobabilité.

   Ainsi, $P(B) = \frac{333}{900} = \frac{111}{300} = \frac{37}{100}$. Donc $\boxed{P(B) = \frac{37}{100} = 0,37.}$

   De même, $P(C) = \frac{297}{900} = \frac{99}{300} = \frac{33}{100}$. Donc $\boxed{P(C) = \frac{33}{100} = 0,33.}$

(b) On a $\overline{B}$: " ce n'est pas un pot de fabrication biologique ", mais comme il faut être optimiste dans la vie, ne mettons pas de négation. D'où $\boxed{\overline{B} : \text{" c'est un pot de fabrication industrielle ".}}$

De plus, $P(\overline{B}) = \dfrac{567}{900} = \dfrac{189}{300} = \dfrac{63}{100}$ donc $\boxed{P(\overline{B}) = \dfrac{63}{100} = 0,63.}$

$\boxed{B \cap C : \text{" c'est un pot de confiture de fabrication biologique ".}}$

De plus, $P(B \cap C) = \dfrac{63}{900} = \dfrac{7}{100}$, donc $\boxed{P(B \cap C) = \dfrac{7}{100} = 0,07.}$

$\boxed{B \cup C : \text{" le pot est de fabrication biologique ou de confiture, ou les deux "}}$. Il faut calculer le nombre de pots qui sont dans cette situation. Mais attention à ne pas compter deux fois les pots de confiture de fabrication biologique. On a $333 + 297 - 63 = 567$, donc $P(B \cup C) = \dfrac{567}{900} = \dfrac{189}{300} = \dfrac{63}{100}$. Ainsi, $\boxed{P(B \cup C) = \dfrac{63}{100} = 0,63.}$

(c) On choisit au hasard un pot parmi les pots de confiture.
On a $\dfrac{63}{297} = \dfrac{7}{33}$, donc $\boxed{\text{la probabilité que le pot soit de fabrication biologique est } \dfrac{7}{33}.}$

(d) On choisit au hasard un pot parmi les pots de fabrication biologique.
On a $\dfrac{63}{333} = \dfrac{21}{111} = \dfrac{7}{37}$, donc $\boxed{\text{la probabilité que le pot soit un pot de confiture est } \dfrac{7}{37}.}$